



A. G. b. 471

Apollonius

F

<36611071150015



<36611071150015

Bayer. Staatsbibliothek

$\frac{c}{m}$

Die

Bücher des Apollonius von Perga

DE INCLINATIONIBUS

wiederhergestellt von

S a m. H o r s l e y

nach dem Lateinischen frey bearbeitet

v o n

Dr. W. A. Diesterweg

ordentlichem Professor der Mathematik an der königl. preufs.
Rheinuniversität.

Mit 19 Steintafeln.

B e r l i n

verlegt von G. Reimer

1 8 2 3.

31. B

DE INCLINATIONIBUS
Bücher des Apollonius von Perga

von
S. A. M. H. O. R. A. Y.

nach dem lateinischen Text bearbeitet



Mit 10 Steinplatten

B e r l i n
verlegt von G. Reimer
1 8 2 8

D e m

Hochwürdigen Herrn

Jacob Wilhelm Grimm

Doctor der Theologie, Generalsuperintendenten
und geheimem Consistorialrathe in Dillenburg

in dankbarer Verehrung gewidmet

von dem Verfasser.

D e m

Hochwürdigen Herrn

Jacob Wilhelm Grimm

Doctor der Theologie, Generalsuperintendent
und geheimer Consistorialrath in Dillenburg

in dankbarer Verehrung gewidmet

von dem Verfasser.

Vorrede.

Als Hindenburg die Camerer'sche Uebersetzung der Bücher des Apollonius von Perga über die ebenen Oerter anzeigte, schrieb er unter anderem folgendes:

„Dafs tiefere Kenntnisse der so vortrefflichen
„geometrischen Analysis der Alten unter uns
„seltener sind, als man wohl wünschen sollte,
„davon ist gewifs eine der erheblichsten Ur-
„sachen diese: dafs man so wenige, fast gar
„keine brauchbare und leicht zu habende Hand-
„ausgaben solcher Schriften hat, die dazu Anlei-
„tung geben, andere Ausgaben aber theils zu
„selten, theils zu kostbar sind, als dafs gerade
„diejenigen sich solche anschaffen könnten, die
„am meisten daraus Nutzen ziehen würden. Und
„so wird mancher gute Kopf zu frühzeitig in
„die Algebra hineingeführt, der mit weit grö-
„serem Vortheil noch einige Zeit beym Euklides
„und Archimedes und Apollonius verweilte, und
„seinen Verstand durch die scharfsinnigen Me-
„thoden und Wendungen dieser Geometer ge-
„schärft und ausgebildet hätte. Was das auf
„sich habe, können freilich nur diejenigen recht
„übersehen, die von beiden Seiten urtheilen.
„Für andere kann es genug seyn, hier anzu-
„führen, dafs selbst Neuton es in der Folge
„bereut habe, dafs er in den ersten Jahren seines
„mathematischen Fleisses zu geschwind zu den

„Werken des Cartesius und anderer Algebraisten
 „übergegangen, bevor er die Methoden des Eu-
 „klides und anderer alten Geometer recht reiflich
 „erwogen und sich eigen gemacht.

„Was von der Vortrefflichkeit der alten
 „Geometrie und Analysis, und der Nothwendig-
 „keit, sich mit ihr zu beschäftigen, hier gesagt
 „worden ist, hat keineswegs die Absicht, die
 „Analysis der Neueren herabzusetzen, die die
 „geometrischen Untersuchungen nicht selten un-
 „gemein erleichtert, in einem einzigen Ausdrucke
 „oft unzählige Fälle zusammenfaßt, und wodurch
 „überhaupt das Gebiet der Geometrie, so wie
 „deren Anwendung auf wirkliche Gegenstände,
 „so beträchtlich und so glücklich ist erweitert
 „worden, daß die Alten über die Eroberungen,
 „die man, mit diesen Waffen in der Hand, in
 „so kurzer Zeit gemacht hat, billig erstaunen
 „würden. Ich behaupte nur, daß man diese
 „Waffen nicht recht glücklich führen kann,
 „wenn man sich nicht bis auf einen gewissen
 „Grad stark genug dazu fühlt. Das zu bewirken,
 „ist unstreitig die Geometrie der Alten am meisten
 „geschickt. Sie bereichert den Verstand mit
 „mannichfaltigen Kenntnissen und Methoden auf
 „dem Wege der anschaulichen Evidenz, und
 „sichert dadurch den Besitz derselben um so
 „zuverlässiger. Und da das Verfahren der neueren
 „Analysis sich zum Theil auf jenes der älteren
 „gründet, so wird man auch die Ausdrücke und
 „Formeln besser gebrauchen und sicherer an-
 „wenden lernen, durch welche die weitläuftigeren
 „Schlüsse der letzteren, in jener so beträchtlich
 „abgekürzt und zusammengezogen werden.“

Als Hachette den (zweiten Anhang der
Géometrie descriptive von Monge herausgab,

liefs er eine Uebersetzung der von John Leslie in Edinburg herausgegebenen geometrischen Analysis folgen, weil er die Ueberzeugung gewonnen hatte, daß das Studium dieser Wissenschaft dem Studium der *Geometrie descriptive* vorausgehen müsse.

Lagrange, jener große Analytiker der neueren Zeit, sagt in den *Mem. de Berlin* 1775., daß die geometrische Methode der Alten in einigen Fällen der algebraischen Analysis vorzuziehen sey, sowohl wegen ihrer einleuchtenden Darstellungsart, als wegen der Eleganz und Leichtigkeit ihrer Auflösungen, es gebe sogar Fälle, wo die algebraische Analysis unzureichend, und die geometrische Methode allein anwendbar scheinen könnte.

Dies für diejenigen, bey welchen das Studium der Werke des großen Geometers der Alten, Apollonius von Perga, einer Empfehlung durch berühmte Namen bedarf.

Die Schrift des Apollonius *de inclinationibus* gehört mit zu den verloren gegangenen dieses Geometers. Das wenige, was Pappus in seinen *collectionibus mathem. lib. VII.* darüber berichtet und daraus aufbewahrt hat, ist alles, was man über den Inhalt dieser Schrift weiß. Das Interesse, welches die auf uns gekommenen Schriften des Apollonius erwecken, veranlaßte mehrere Mathematiker, eine Wiederherstellung dieser Schrift zu versuchen. Am glücklichsten waren Sam. Horsley und Reuben Burrow, wovon jener eine Schrift

Apollonii Pergaei Inclinationum Libri duo,
Oxonii 1770.

dieser eine Schrift

*A restitution of the Geometrical Treatise
of Apollonius Pergaeus on Inclinations,
London 1779.*

herausgab, welche in Inhalt, Behandlung und Darstellung sehr mit einander übereinstimmen.

Ich gebe hier die Schrift von Horsley, als die ausführlichere, in einer freyen Bearbeitung, nicht einer Uebersetzung. Ich habe überall vollständige Constructionen und Beweise gegeben, welche bey Horsley entweder ganz fehlen, oder nur angedeutet worden sind, habe hin und wieder einen anderen Gang zur Angabe der Determination, Construction und des Beweises gewählt, wie er mir der Sache mehr angemessen schien, auch Anmerkungen und Zusätze hinzugefügt.

Bonn im Oct. 1822. Diesterweg.

THE SPONTANEOUS VIBRATION

EXAMINER

Der Bücher

de inclinationibus

Erstes.

Det. Bucher

de. n. l. i. n. a. t. i. o. n. i. b. u. s.

B. 1. 1. 1.

Des APOLLONIUS von PERGA

ERSTES BUCH

DE INCLINATIONIBUS.

Aufgabe I. (Fig. 1. 2. 3.)

Von einem in der Ebene eines der Lage und Gröfse nach gegebenen Kreises ABC , aufserhalb, oder innerhalb desselben, gegebenen Punkte D eine gerade Linie DB durch den Kreis zu ziehen, deren in denselben fallendes Segment BE gleich der gegebenen geraden Linie N sey.

Analysis.

Es sey BE die gesuchte Linie. Macht man $FGE=R$, und zieht FE , so ist $EG=\frac{1}{2}BE$ (Eucl. El. III. 3.), also EG eine gegebene gerade Linie. Da auch FE (p. hyp.) gegeben ist, so ist Eukl. Dat. 6o. *) FG der Gröfse nach, somit (Dat. Def. 7.) ein aus F als Mittelpunkt mit einem Radius $= FG$ beschriebener Kreis der Lage und Gröfse nach gegeben. Und da wegen des rechten Winkels DGF die

*) Die Citate der Data von Euklid beziehen sich auf die von Schwab besorgte Ausgabe. Stuttgart 1780.

Linie DG eine Tangente dieses Kreises ist (El. III. 16.), so ist DG der Lage nach gegeben (Dat. 94.), gleichwie die Durchschnittspunkte B, E mit dem (p. hyp.) gegebenen Kreise (Dat. 28.) gegeben sind.

Determination.

In Fig. 1. 2. 3. muß $N \leq AC$ seyn (El. III. 15.).

In Fig. 2. 3. muß überdies, damit von D eine Tangente an den aus F als Mittelpunkt mit einem Radius $= DG$ beschriebenen Kreis gezogen werden könne,

$$\underline{FG \leq FD}$$

$$\begin{array}{l} \text{also } FG^2 \leq FD^2 \\ \text{(El. I. 47.) } \left. \begin{array}{l} FE^2 - EG^2 \\ EF^2 - \frac{1}{4}N^2 \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{folglich } \left. \begin{array}{l} EF^2 \\ FH^2 \\ DH^2 \end{array} \right\} - FD^2 \leq \frac{1}{4}N^2 \end{array}$$

$$\underline{\text{mithin } DH \leq \frac{1}{2}N}$$

$$\text{somit } HK \leq N \text{ seyn.}$$

Construction und Beweis.

Man ziehe durch D und den Mittelpunkt F des gegebenen Kreises die gerade Linie DF, welche den Kreis in A, C schneide, lege von A aus in denselben eine Sehne $= N$, welches (Det.) geschehen kann. Ist $N = AC$, so ist AC die gesuchte Linie. Ist $N < AC$, so fälle man von F auf die Sehne AP, wenn $AP = N$, ein Perpendikel FQ, beschreibe aus F als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius $= FQ$, und lege

an denselben von D aus eine Tangente DG, welches in Fig. 1. immer geschehen kann.

In Fig. 2. ist $\underline{HK = N}$

also $\underline{DH = \frac{1}{2}N}$

folglich $\underline{\left. \begin{matrix} DH^2 \\ HF^2 - FD^2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{4}N^2 \\ AQ^2 \\ AF^2 - FQ^2 \end{matrix} \right.}$

mithin $\underline{FD^2 > FQ^2}$

somit $\underline{FD > FQ}$

Ist $DF = FQ$ (Fig. 3.), so ist HK die gesuchte Linie (El. III. 14.). Ist $FD > FQ$, so lege man von D aus eine Tangente an den zuletzt beschriebenen Kreis, welches geschehen kann.

Sind in Fig. 1. 2. B, E die Durchschnittspunkte derselben mit dem über AC beschriebenen Kreise, so ist BE die gesuchte Linie. Denn es ist

$\underline{EGF = FQA \text{ (El. III. 18.)}, GF = FQ}$

also $\underline{EB = \left\{ \begin{matrix} AP \text{ (El. III. 14.)} \\ N \end{matrix} \right.}$

Anm. 1. Da von einem ausserhalb eines Kreises gelegenen Punkte zwey Tangenten an denselben sich ziehen lassen, so giebt es in Fig. 1. 2. zwey Linien, welche der Aufgabe Genüge thun.

Anm. 2. Aus Lehns. 1. 2., welche in *Pappi Collect. mathem. lib. VII. Bonon. 1660. pag. 305.* enthalten sind, scheint hervorzugehen, dafs Apollonius

diese Aufgabe auf anderem Wege aufgelöst habe, nach folgender Analysis.

Es sey DEB die gesuchte Linie, so ist, wenn durch den Mittelpunkt F die den Kreis in A, C schneidende gerade Linie DA gezogen wird, $BD \cdot DE = AD \cdot DC$ (El. III. 36. Cor.). Da AD, DC gegeben sind (Dat. 28.), so ist AD.DC, somit BD.DE, und da $BE = BD - DE$ (Fig. 1.), oder $BE = BD + DE$ (Fig. 2.) gegeben ist, BD der Gröfse nach (Dat. 85. oder 86.), somit DB der Lage nach (Dat. 28.) gegeben.

Aufgabe II. (Fig. 4—16.)

Von dem gegebenen Endpunkte A des Durchmessers AB eines der Lage und Gröfse nach gegebenen Kreises eine gerade Linie durch den Kreis zu ziehen, deren zwischen denselben und eine in einem gegebenen Punkte auf jenem Durchmesser perpendikuläre gerade Linie fallendes Segment CF der gegebenen geraden Linie N gleich sey.

Fall 1. (Fig. 4.)

Der gegebene Punkt liegt in dem anderen Endpunkte B des Durchmessers AB.

Analysis.

Es sey CF die gesuchte Linie. Zieht man BC, so ist $\triangle ABF \sim \triangle ACB$ (El. IV. 4.)

also $\underline{FA:AB = BA:AC}$

folglich $FA \cdot AC = AB^2$ (El. VI. 17.)

Da nun AB, also auch AB^2 gegeben ist, so ist $FA \cdot AC$, und weil $FA - AC = FC = N$ gegeben ist, AF der Gröfse nach (Dat. 85.) und (Dat. 34.) der Lage nach gegeben,

Aufgabe 2.

5

Construction.

Man nehme $BG=N$, beschreibe über BG als Durchmesser einen Kreis, dessen Mittelpunkt D sey, ziehe durch A, D eine gerade Linie, welche den über BG beschriebenen Kreis in H, E schneide, und beschreibe aus A als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius = der grösseren Linie AE , welcher die Linie BF in F schneide, so ist CF die gesuchte Linie.

Beweis.

Zieht man BC , so ist $\triangle AFB \sim \triangle ABC$

$$\text{also } \overline{FA:AB=BA:AC}$$

$$\text{folglich } FA \cdot AC = AB^2 \text{ (El. VI. 17.)}$$

$$= EA \cdot AH \text{ (El. III. 36.)}$$

$$\text{mithin } \overline{FA:AE=HA:AC} \text{ (El. VI. 16.)}$$

$$\text{somit } \overline{HA=AC}$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} EA - AH \\ HE \\ BG \\ N \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} FA - AC \\ FC \end{array} \right.$$

Anm. Da der aus A als Mittelpunkt mit einem Radius = AE beschriebene Kreis die Linie BF zweimal schneidet, so giebt es eine zweite Linie mit der gegebenen Eigenschaft.

Fall 2. (Fig. 5—15.)

Der gegebene Punkt liegt in der Verlängerung des Durchmessers AB

A) über den Punkt B hinaus (Fig. 5. 6.).

Analysis.

Es sey FC die gesuchte Linie. Zieht man BC,
so ist $\triangle ADF \sim \triangle ABC$ (El. VI. 4)

$$\text{also } FA:AD = BA:AC$$

$$\text{folglich } FA \cdot AC = BA \cdot AD \text{ (El. VI. 16.)}$$

Da wegen der (p. hyp.) gegebenen BA, AD das Rechteck FA.AC der Gröfse nach gegeben ist, so ist, da $FA - AC = CF = N$ gegeben ist, FA (Dat. 85.) der Gröfse und (Dat. 34.) der Lage nach gegeben.

Determination.

$$\text{Es ist } \left. \begin{array}{l} FA > AD \\ AC < AB \end{array} \right\} \text{ (El. I. 19.)}$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} FA - AC \\ CF \end{array} \right\} > \left\{ \begin{array}{l} DA - AB \\ BD \end{array} \right.$$

folglich muß $N > BD$ seyn.

Construction.

Man mache $BO = OD$, beschreibe über AO einen Halbkreis, lege in denselben die Sehne $HO = OB$, ziehe AH, auf der Verlängerung von OH nehme man $KH = N$, über KH als Durchmesser beschreibe man einen Kreis, dessen Mittelpunkt L sey, durch A, L ziehe man eine gerade Linie, welche in M, R den über KH beschriebenen Kreis schneide, und beschreibe aus A als Mittelpunkt mit einem Radius $= AR$ einen Kreis. Die gerade Linie, welche den Punkt A mit dem Punkte verknüpft, in welchem dieser Kreis die gerade Linie DF erreicht, wird das Verlangte leisten.

Aufgabe 2.

7

Beweis.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Es ist } BD \\ DA-AB \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \left\{ \begin{array}{l} N \text{ (Det.)} \\ MR \\ RA-AM \end{array} \right.$$

$$\text{also } (DA-AB)^2 \begin{array}{l} = \\ < \end{array} (RA-AM)^2$$

$$\begin{aligned} \text{Es ist aber } RA \cdot AM &= AH^2 \text{ (El. III. 36.)} \\ &= AO^2 - \begin{cases} OH^2 \text{ (El. III. 31. I. 47.)} \\ OB^2 \text{ (Constr.)} \end{cases} \\ &= DA \cdot AB \text{ (El. II. 6.)} \end{aligned}$$

$$\text{also } \left\{ \begin{array}{l} (DA-AB)^2 + 4DA \cdot AB \\ (DA+AB)^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \left\{ \begin{array}{l} (RA-AM)^2 + 4RA \cdot AM \\ (RA+AM)^2 \end{array} \right. \text{ (El. II. 8.)}$$

$$\text{mithin } \left\{ \begin{array}{l} DA+AB \\ 2AO \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \left\{ \begin{array}{l} RA+AM \\ 2AL \end{array} \right.$$

$$\text{somit } AO \begin{array}{l} = \\ < \end{array} AL$$

$$\text{und } \left\{ \begin{array}{l} AO+OD \\ AD \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \left\{ \begin{array}{l} AL+LR \\ AR \end{array} \right.$$

Der aus A als Mittelpunkt mit einem Radius = AR beschriebene Kreis erreicht also die Linie DF in D (Fig. 6.), oder in einem anderen Punkte F (Fig. 5.). Im ersten Fall ist AM=AB, weil RA·AM=DA·AB, und RA=AD,

$$\text{folglich } \left\{ \begin{array}{l} RA-AM \\ MR \\ N \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} DA-AB \\ DB \end{array} \right.$$

Im zweiten Fall ist, wenn AF gezogen, und der Punkt B mit dem Durchschnitte C derselben

mit dem über AB liegenden Kreise durch eine gerade Linie verknüpft wird, $\triangle AFD \sim \triangle BAC$

$$\text{also } FA:AD = BA:AC$$

$$\text{folglich } FA.AC = BA.AD \\ = RA.AM$$

$$\text{mithin } CA = AM$$

$$\text{somit } \left. \begin{array}{l} FA - AC \\ CF \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} RA - AM \\ RM \\ N \end{array} \right.$$

B) über den Punkt A hinaus (Fig. 7—15.).

Analysis.

Es sey FC die gesuchte Linie. Zieht man BC, so ist $\triangle AFD \sim \triangle BAC$ (El. VI. 4.)

$$\text{also } FA:AD = BA:AC$$

$$\text{folglich } FA.AC = BA.AD \text{ (El. VI. 16.)}$$

Da wegen der gegebenen Linien BA, AD das Rechteck FA.AC der Gröfse nach gegeben ist, so ist, wegen der gegebenen $N = FC = FA + AC$, FA (Dat. 86.) der Gröfse und (Dat. 34.) der Lage nach gegeben.

Determination.

Vermöge El. II. 5. mufs $\frac{1}{4}N^2 = \left\{ \begin{array}{l} BA.AD \text{ seyn,} \\ AE^2 \text{ (El. VI. 17.)} \end{array} \right.$
wenn DAE = R, und E der Durchschnitt der Linie AE mit dem Kreise über BD ist,

$$\text{also } \frac{1}{4}N^2 = AE^2$$

Construction und Beweis.

Man beschreibe über BD einen Halbkreis, mache $DAE=R$, verlängere AE bis zum Durchschnitt mit dem Halbkreise über BD, nehme $AG=N$, beschreibe über AG einen Halbkreis, und ziehe $EH \nparallel AB$. Es sey

a) $DA < AB$ (Fig. 7—10.). Ist nun!

$\alpha)$ $AE = \frac{1}{2}N$ (Fig. 7.)

$=AM$, wenn $AM=MG$, so berührt (El. III. 18.) EH den über AG beschriebenen Halbkreis in H, wenn $AMH=R$, und es ist $AM > AD$ (El. II. 5.). Man beschreibe aus A als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius $=AM$, welcher also die DF schneidet. Es geschehe in F.

$\beta)$ Ist $AE < \frac{1}{2}N$ (Fig. 8. 9. 10.)

$\{AM$, wenn $AM=MG$, so schneidet EH den über AG beschriebenen Halbkreis. Es geschehe in H, L. Man fälle von H, K auf AG die Perpendikel

HK, LO. Ist nun $DB \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} AG$, so ist auch

$$\frac{\frac{1}{2}DB}{DQ} \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{2}AG \\ \\ AM \end{cases}$$

$$\frac{\text{also } DQ^2}{DA \cdot AB + AQ^2} \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \begin{cases} AM^2 \\ \\ AK \cdot KG + MK^2 \end{cases} \text{ (El. II. 5.)}$$

$$\text{folglich } AQ^2 \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} MK^2$$

$$\text{mithin } AQ \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} MK$$

$$\text{somit } \frac{AQ+QD}{AB} \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \begin{cases} AM+MK \\ \\ GK \end{cases}$$

Es ist aber $DA \cdot AB = AE^2$ (El. VI. 17.)

$$= HK^2 \text{ (El. I. 34.)}$$

$$= AK \cdot KG \text{ (El. VI. 17.)}$$

$$\text{also } \underline{AB:GK = KA:AB}$$

folglich auch $AK \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} AB$

Man beschreibe aus A als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius = AK, welcher die Linie DF in einem Punkte F schneiden (Fig. 8), berühren (Fig. 9), nicht erreichen wird (Fig. 10.), je nachdem

$DB \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} AG$ ist.

Im Fall des Berührens ist DB die gesuchte Linie, wie von selbst erhellet.

Man beschreibe auch einen Kreis aus A als Mittelpunkt mit einem Radius = AO, welcher in den beiden ersten Fällen die Linie DF schneiden wird, weil $AO > AM$. Im dritten ist $AO \cdot OG = BA \cdot AD$

$$\text{also } \underline{OA:AD = BA: \begin{cases} OG \\ AK \end{cases}}$$

folglich $DA < AO$

mithin schneidet er auch in diesem Fall die Linie DF. Es geschehe in F. Man verbinde B mit dem Durchschnitte $\begin{Bmatrix} C \\ C' \end{Bmatrix}$ der verlängerten $\begin{Bmatrix} FA \\ F'A \end{Bmatrix}$ und das über AB

liegenden Kreises, so ist

$$\triangle FAD \sim \triangle BAC$$

$$\text{also } FA:AD = BA:AC$$

$$\text{folglich } \underline{FA \cdot AC = BA \cdot AD}$$

$$= AK.KG$$

$$\text{mithin } FA:AK = KG:AC$$

$$\text{somit } KG = AC$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} AK + KG \\ AG \\ N \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} FA + AC \\ FC \end{array} \right.$$

Eben so wird der Beweis für den Punkt F' geführt.

b) Es sey $DA \geq AB$. (Fig. 11—15.)

α) Ist nun $AE = \frac{1}{2}N$ (Fig. 11. 12.)

$= AM$, wenn $AM = MG$, so berührt EH den über AG beschriebenen Halbkreis im Punkt H, wenn $AMH = R$, und es ist $AM < AD$,

je nachdem $DA \geq AB$ Fig. $\left\{ \begin{array}{l} 11. \\ 12. \end{array} \right\}$. Man beschreibe aus A als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius $= AM$, welcher also die Linie DF in D berührt, oder gar nicht erreicht. Im Fall des Berührens ist DB die gesuchte Linie, wie von selbst erhellet.

β) Ist $AE < \frac{1}{2}N$ (Fig. 13. 14. 15.)

AM , wenn $AM = MG$, so schneidet EH den über AG beschriebenen Halbkreis. Es geschehe in H, L. Man fälle von H, L auf AG die Perpendikel HK, LO.

$$\text{Da } AK.KG = DA.AB$$

$$\text{also } KA:AD = AB:KG$$

$$\text{überdies } DA \geq AB, AK < KG$$

$$\text{so ist } KA < AD$$

Beschreibt man also aus A als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius = AK, so erreicht derselbe die Linie DF nicht.

$$\text{Ist nun } DB \left\{ \begin{array}{l} > \\ = \\ < \end{array} \right\} AG$$

$$\text{so ist auch } \frac{1}{2}DB \left\{ \begin{array}{l} > \\ = \\ < \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}AG \\ \\ AM \end{array} \right.$$

$$\text{also } DQ^2 \left\{ \begin{array}{l} > \\ = \\ < \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} AM^2 \\ DA \cdot AB + AQ^2 \\ AK \cdot KG + MK^2 \text{ (El. II. 5.)} \end{array} \right.$$

$$\text{folglich } AQ^2 \left\{ \begin{array}{l} > \\ = \\ < \end{array} \right\} MK^2$$

$$\text{mithin } AQ \left\{ \begin{array}{l} > \\ = \\ < \end{array} \right\} MK$$

$$\text{somit } \frac{QA + AD}{AD} \left\{ \begin{array}{l} > \\ = \\ < \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} AM + MK \\ \\ MO \\ AO \end{array} \right.$$

Man beschreibe aus A als Mittelpunkt mit einem Radius = AO einen Kreis, welcher also die Linie DF in einem Punkte F schneiden (Fig. 13.), oder berühren (Fig. 14.), oder gar nicht erreichen wird (Fig. 15.).

Im Fall des Berührens ist DB die gesuchte Linie, wie von selbst erhellet.

Im Fall des Schneidens ist, wenn man den Punkt B mit dem Durchschnitte der verlängerten FC und des Kreises über AB durch die gerade Linie BC verknüpft,

$$\begin{array}{l} \triangle FAD \sim \triangle BAC \\ \text{also } \underline{FA : AD = BA : AC} \end{array}$$

$$\text{folglich } FA \cdot AC = BA \cdot AD \\ = AO \cdot OG$$

$$\text{mithin } FA : AO = OG : AC$$

$$\text{somit } OG = AC$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} AO + OG \\ AG \\ N \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} FA + AC \\ FC \end{array} \right.$$

Anm. Da ein Kreis eine gerade Linie zweimal schneidet, so bestimmt in den Fällen des Schneidens der zweite Durchschnitt eine zweite Linie mit der gegebenen Eigenschaft.

Fall 3. (Fig. 16.)

Der gegebene Punkt liegt auf dem Durchmesser selbst.

Analysis.

Es sey CF die gesuchte Linie. Zieht man BC, so ist $\triangle ABC \sim \triangle AFD$

$$\text{also } BA : AC = FA : AD$$

$$\text{folglich } BA \cdot AD = FA \cdot AC \text{ (El. VI. 16.)}$$

Da wegen der gegebenen Linien BA, AD das Rechteck FA.AC der Gröfse nach, und $N = FC = CA - AF$ gegeben ist, so ist AF (Dat. 85.) der Gröfse und (Dat. 34.) der Lage nach gegeben.

Determination.

Für den Fall, dafs CF innerhalb des Kreises liege, ist $BA > AC$ (El. III. 15.), $FA > AD$ (El. I. 19.)

$$\text{also } \frac{BA-AD}{BD} > \frac{CA-AF}{CF}$$

folglich muß $N \overset{=}{<} BD$ seyn.

Construction.

Man halbire BD in O , beschreibe über AO einen Halbkreis, lege in denselben die Sehne $HO=OD$, ziehe AH , auf der verlängerten OH mache man $HK=N$, beschreibe über HK als Durchmesser einen Kreis, dessen Mittelpunkt L sey, ziehe durch A, L eine diesen Kreis in M, M' schneidende gerade Linie, und beschreibe aus A als Mittelpunkt Kreise mit Radien $=AM, AM'$. Die geraden Linien, welche den Punkt A mit den Punkten verknüpfen, in welchen diese Kreise mit der Linie DF zusammenkommen, werden die gesuchten Linien bestimmen.

Beweis.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } M'A \cdot AM &= AH^2 \text{ (El. III. 36.).} \\ \text{(El. II. 6.) } AL^2 - LM^2 &= AO^2 - OH^2 \end{aligned}$$

$$\text{Nun ist } \frac{N}{KH} \overset{=}{<} BD$$

$$\text{also } \frac{LM}{OD} \overset{=}{<} OD$$

$$\text{und } \frac{LM^2}{OD^2} \overset{=}{<} OD^2$$

$$\text{folglich } \frac{AL^2}{AO^2} \overset{=}{<} AO^2$$

$$\text{und } \frac{AL}{AO} \overset{=}{<} AO$$

$$\text{mithin } \frac{AL+LM}{AM'} \overset{=}{<} \frac{AO+OD}{AB}$$

Es ist auch $M'A \cdot AM = BA \cdot AD$

$$\text{also } \frac{M'A}{AB} = \frac{DA}{AM}$$

$$\text{folglich } DA = AM$$

Der aus A als Mittelpunkt mit einem Radius $= AM$ beschriebene Kreis berührt also die Linie DF in D, oder schneidet sie in einem Punkte F. Und der aus A als Mittelpunkt mit einem Radius $= AM'$ beschriebene schneidet sie in einem Punkte F'. Im ersten Fall ist BD die gesuchte Linie, wie von selbst erhellet. In den beiden anderen Fällen ziehe man AF, AB und verknüpfe den Punkt B mit den Durchschnitten C, C' dieser Linien und des über AB liegenden Kreises durch die geraden Linien BC, BC'.

Es ist $\triangle BAC \sim \triangle FAD$ und $\triangle BAC' \sim \triangle F'AD$

$$\text{also } \frac{BA}{AC} = \frac{FA}{AD} \quad \text{also } \frac{BA}{AC'} = \frac{F'A}{AD}$$

$$\text{folglich } \frac{BA \cdot AD}{M'A \cdot AM} = \frac{FA \cdot AC}{M'A \cdot AM} \quad \text{folglich } \frac{BA \cdot AD}{M'A \cdot AM} = \frac{F'A \cdot AC'}{M'A \cdot AM}$$

$$\text{mithin } M'A = AC$$

$$\text{mithin } AM = AC'$$

$$\text{somit } \frac{M'A - AM}{M'M} = \frac{CA - AF}{FC} \quad \text{somit } \frac{M'A - AM}{M'M} = \frac{FA - AC'}{C'F'}$$

Anm. Da ein Kreis eine gerade Linie zweimal schneidet, so bestimmen die zweiten Durchschnittpunkte eine zweite Linie mit der gegebenen Eigenschaft.

Lehnsatz A. (Fig. 17.)

Wenn von einem Winkelpunkte D eines Rhombus, oder Quadrates ABCD zwey gerade Linien DH, DF

durch die Schenkel des Nebenwinkels CBH des dem Punkte D gegenüberliegenden Winkels ABC gezogen sind, so ist von den zwischen die Schenkel dieses Nebenwinkels fallenden Segmenten dasjenige, GH, das grössere, dessen Verlängerung GD mit der Diagonale DB den grösseren Winkel bildet.

Beweis.

Bezeichnet man mit E, G die Durchschnittspunkte der Linien HE, DF mit BC,

so ist $\underline{GB > BE}$

also $\underline{GB : BC} > \underline{EB : BC}$ (El. V. 8.)

$\underline{GH : HD} > \underline{EF : FD}$ (El. VI. 2.)

Ferner ist $\underline{ABD < R}$ (El. I. 29. 34. Cor.)

also $\underline{DBH > R}$ (El. I. 13.)

folglich auch $\underline{DFH > R}$ (El. I. 16.)

mithin $\underline{FD < DH}$ (El. I. 18.)

somit $\underline{GH : HD < GH : FD}$ (El. V. 8.)

also auch $\underline{GH : FD > EF : FD}$ *)

folglich $\underline{GH > ED}$ (El. V. 10.)

Lehnsatz B. (Fig. 17.)

Wenn von einem Winkelpunkte D eines Quadrates, oder Rhombus ABCD durch die Schenkel der beiden Nebenwinkel des dem Punkte D gegenüberliegenden Winkels ABC gerade Linien KD, DH gezo-

*) *Proposit. de ration. inter se diversis demonstrat. edid. Hauber. Tubing. 1793. §. 7.*

gen sind, deren zwischen die Schenkel der Nebenwinkel fallende Segmente LK, GH einander gleich sind, so sind auch die Segmente BL und BG, DL und DG, DH und DK, BK und BH einander gleich.

Beweis.

Sollte nicht $BL = BG$ seyn, so sey $BE = BL$.

Nun ist $LBD = EBD$ (El. I. 34. Cor.)

auch $BD = DB$

also wäre $\overline{BLD} = \overline{BED}$ (El. I. 4.)

mithin auch $BLK = BEF$ (El. I. 13.)

Es ist aber $LBK = EBF$

also wäre $\left. \begin{array}{l} LK \\ GH \end{array} \right\} = EF$ (El. I. 26.)

welches unmöglich ist (Lehnsatz A.).

Da also $LB = BG$, auch $BD = DB, LBD = GBD$ (El. I. 8.)

so ist $LD = DG, BDL = BDG$

Ueberdies ist $LK = GH, DB = BD$

folglich ist auch $KD = DH$

somit $KB = BH$

Zus. 1. Die Winkel BDK, BDH sind in der gemachten Voraussetzung ebenfalls einander gleich.

Zus. 2. Da $KLB = HGB$, so liegen die Punkte K, L, G, H auf dem Umfang eines Kreises, dessen Mittelpunkt wegen El. III. 1. Zus. in der Linie DB , folglich in O liegt, wenn $GN = NH, GNO = R$ gemacht wird.

Da $AD = BG$

so ist $DA:AH = GB:BH$ (El. VI. 2.)

also auch $DA^2:AH^2 = GB^2:BH^2$ (El. VI. 22.)

Nun ist $DA^2 < AH^2$ (hyp.)

folglich $\left. \begin{matrix} GB^2 \\ BM^2 + MG^2 \end{matrix} \right\} < \left. \begin{matrix} BH^2 \\ BM^2 + MH^2 \end{matrix} \right\}$

mithin $MG^2 < MH^2$

somit $MG < MH$

also $MG < \begin{matrix} \frac{1}{2}GH \\ GN \end{matrix}$

somit $DM < DN$

Da nun $MD:DN = BD:DO$

so ist auch $BD < DO$

also liegt O in der Verlängerung von BD.

Aufgabe III. (Fig. 18.)

Von einem Winkelpunkte D eines der Lage und Gröfse nach gegebenen Quadrates, oder Rhombus ABCD eine gerade Linie durch die Schenkel des Nebenvinkels des dem Punkte D gegenüberliegenden Winkels B zu ziehen, deren zwischen dieselben fallendes Segment einer gegebenen geraden Linie N gleich sey.

Analysis.

Die gesuchten Linien seyen EF, GH. Vermöge Lehns. B. Zus. 2. liegen H, G, E, F auf dem Umfange eines Kreises, dessen Mittelpunkt K in der Verlängerung von DB liegt.

Es ist auch $GB = BE, GK = KE, BK = KB$

also $GKB = BKE$ (El. I. 8.)

folglich $\text{arc.GL} = \text{arc.LE}$ (El. III. 26.)

somit $\text{DKE} = \text{DFB}$ (El. III. 20.)

Auch ist $\text{KDE} = \text{FDB}$

mithin $\text{KE:ED} = \text{FB:BD}$

Nun ist $\text{DE:EF} = \text{AB:BF}$ (El. VI. 2.)

also $\text{KE:EF} = \text{AB:BD}$ (El. V. 23.)

Da AB, BD, EF gegeben sind, so ist KE der Gröfse nach gegeben (Dat. 2.).

Ferner ist $\text{KBF} = \text{ABD}$ (El. I. 15.)

$= \text{DBE}$ (El. I. 8.)

folglich $\text{KBE} = \text{DBF}$

$= \text{DEK}$ (Bew.)

mithin $\text{DK:KE} = \text{EK:KB}$ (El. VI. 4.)

somit $\text{DK.KB} = \text{EK}^2$ (El. VI. 17.)

Also ist DK.KB der Gröfse nach gegeben. Da auch $\text{DK} - \text{KB} = \text{DB}$ gegeben ist, so ist DK der Gröfse nach (Dat. 85.), somit der Punkt K, und da KE der Gröfse nach gegeben ist, der Punkt E, gleichwie der Punkt G gegeben (Dat. 34.), folglich sind DG, DE der Lage nach gegeben.

Construction.

Man mache $\text{BL} = \text{N}$, $\text{LM} \perp \text{DA}$, $\text{DBN} = \text{R}$, $\text{NB} = \text{BM}$, $\text{DQ} = \text{QB}$, beschreibe aus Q als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius $= \text{QN}$, welcher die verlängerte QB in K schneide, ziehe $\text{KO} \perp \text{BN}$, $\text{NO} \perp \text{BK}$, beschreibe aus K als Mittelpunkt mit einem Radius $= \text{KO}$ einen Kreis, welcher BA, BC in G, E schneide, und ziehe DG, DE, so ist das Verlangte geschehen.

Beweis.

Es ist $DK \cdot KB = BN^2$ (El. II. 6.)

also $DK:BN = NB:BK$ (El. VI. 17.)

Da nun $DK > KB$

so ist $\left. \begin{matrix} BN \\ KO \end{matrix} \right\} > BK$ (El. II. 5.)

Folglich schneidet der aus K mit KO beschriebene Kreis die Linien CB, BA.

Ferner ist $DK:KE = EK:KB$ (Bew.)

mithin $DEK = \begin{cases} KBE, & EDK = KEB \\ DBF \end{cases}$ (El. VI. 4.)

also $FD:DB = KD:DE$ (El. VI. 4.)

folglich $FD \cdot DE = KD \cdot DB$ (El. VI. 16.)

Die Punkte K, B, E, F liegen somit auf dem Umfang eines Kreises (El. III. 36. Conv.). Daher ist

$KFB = KEB$ (El. III. 21.)

$= KDF$ (Bew.)

also $DK:KF = FK:KB$ (El. VI. 4.)

folglich $KF^2 = DK \cdot KB$ (El. VI. 17.)

Mithin liegt F auf dem Umfang des aus K als Mittelpunkt mit KO als Radius beschriebenen Kreises.

Nun ist $GBS = SBE$ (El. I. 8.)

also $GB = BE$ (El. III. 7.)

folglich $GKB = BKE$ (El. I. 8.)

mithin $\text{arc.}GS = \text{arc.}SE$ (El. III. 26.)

somit $EKD = DFB$ (El. III. 20.)

also $KE:ED=FB:BD$ (El. VI. 4.)

Auch ist $DE:EF=AB:BF$ (El. VI. 2.)

folglich $\left. \begin{array}{l} KE \\ KO \\ BN \\ BM \end{array} \right\} : EF = AB:BD$ (El. V, 21.)
 $\left. \begin{array}{l} KO \\ BN \\ BM \end{array} \right\} = MB:BL$ (El. VI. 2.)

mithin $EF = \left\{ \begin{array}{l} BL \\ N. \end{array} \right.$

Eben so kann der Beweis für GH geführt werden.

Anm. Beschreibt man aus dem zweiten Durchschnitte P des aus Q mit QN beschriebenen Kreises und der verlängerten BD einen Kreis mit PY, nachdem $PY \nparallel BN$ gezogen und ON bis zum Durchschnitt mit PY verlängert worden ist, so werden, wenn dieser Kreis die Linie BM erreicht, dadurch eine, oder zwey Linien zwischen den Schenkeln des Winkels ABC bestimmt, welche = N sind.

Determination.

Damit der eben bezeichnete Kreis die BM erreiche, muß, wenn $PRA=R$ gemacht wird, seyn

$\left. \begin{array}{l} PY \\ BN \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \\ > \end{array} PR$

Nun ist $DB:BA \left\{ \begin{array}{l} = \sin. BAD: \sin. ADB \end{array} \right.$

$DB:a \left\{ \begin{array}{l} = \sin. \alpha: \sin. \frac{1}{2}\alpha, \text{ wenn } AB=a, ABC=\alpha \\ = 2\cos. \frac{1}{2}\alpha:1 \end{array} \right.$

also $DB=2a \cos. \frac{1}{2}\alpha$

Ferner ist $DB:BA \left\{ \begin{array}{l} = LB:BM \text{ (El. VI. 2.)} \\ 2\cos. \frac{1}{2}\alpha:1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \\ N:BN \end{array} \right.$

folglich $BN = \frac{N}{2\cos. \frac{1}{2}\alpha}$

$$\text{Da nun } \left. \begin{array}{l} \text{BP.PD} \\ \text{BP(PB-BD)} \end{array} \right\} = \text{BN}^2 \text{ (El. II. 6.)}$$

$$\text{so ist } \frac{\text{BP(PB-2a.cos.}\frac{1}{2}\alpha\text{)}}{\text{BP}^2-2\text{BP.a.cos.}\frac{1}{2}\alpha} = \frac{\text{N}^2}{4\text{cos.}\frac{1}{2}\alpha^2}$$

$$\text{mithin } \text{BP}^2-2\text{BP.a.cos.}\frac{1}{2}\alpha + \text{a}^2\text{cos.}\frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{\text{N}^2+4\text{a}^2\text{cos.}\frac{1}{2}\alpha^4}{4\text{cos.}\frac{1}{2}\alpha^2}$$

$$\text{also } \text{BP} = \frac{2\text{a.cos.}\frac{1}{2}\alpha^2 + \sqrt{\text{N}^2+4\text{a}^2\text{cos.}\frac{1}{2}\alpha^4}}{2\text{cos.}\frac{1}{2}\alpha}$$

$$\text{Es ist aber } \text{BP} : \text{PR} = 1 : \sin.\frac{1}{2}\alpha$$

$$\text{folglich } \text{PR} = \text{BP.sin.}\frac{1}{2}\alpha$$

$$= \frac{2\text{a.sin.}\frac{1}{2}\alpha\text{cos.}\frac{1}{2}\alpha^2 + \sin.\frac{1}{2}\alpha \sqrt{\text{N}^2+4\text{a}^2\text{cos.}\frac{1}{2}\alpha^4}}{2\text{cos.}\frac{1}{2}\alpha}$$

Folglich muſs seyn

$$\frac{\text{N}}{2\text{cos.}\frac{1}{2}\alpha} > \frac{2\text{a.sin.}\frac{1}{2}\alpha\text{cos.}\frac{1}{2}\alpha^2 + \sin.\frac{1}{2}\alpha \sqrt{\text{N}^2+4\text{a}^2\text{cos.}\frac{1}{2}\alpha^4}}{2\text{cos.}\frac{1}{2}\alpha}$$

$$\text{mithin } \text{N} - 2\text{a.sin.}\frac{1}{2}\alpha\text{cos.}\frac{1}{2}\alpha^2 > \sin.\frac{1}{2}\alpha \sqrt{\text{N}^2+4\text{a}^2\text{cos.}\frac{1}{2}\alpha^4}$$

$$\text{also } \text{N}^2 - 4\text{aN.sin.}\frac{1}{2}\alpha\text{cos.}\frac{1}{2}\alpha^2 > \sin.\frac{1}{2}\alpha^2.\text{N}^2$$

$$\text{somit } \text{N} - 4\text{a.sin.}\frac{1}{2}\alpha\text{cos.}\frac{1}{2}\alpha^2 > \text{N.sin.}\frac{1}{2}\alpha^2$$

$$\text{folglich } \text{N.cos.}\frac{1}{2}\alpha^2 > 4\text{a.sin.}\frac{1}{2}\alpha\text{cos.}\frac{1}{2}\alpha^2$$

$$\text{und } \text{N} > 4\text{a.sin.}\frac{1}{2}\alpha$$

Anm. Macht man $\text{ZDB} = \text{R} = \text{SDT}$, so ist
 $\text{ZD} : \text{DT} = \text{ZA} : \text{AB}$ (El. VI. 2.)

Es ist aber $ZD=DT$ (El. I. 4.)

also auch $ZA=AB$

folglich $ZB=2AB$

$$=2a$$

Ferner ist $BZ \} : ZT = \sin.BTS : \sin.ABC$

$$2a \} = \cos.\frac{1}{2}\alpha : \sin.\alpha$$

$$= 1 : 2\sin.\frac{1}{2}\alpha$$

$$\text{mithin } ST = 4a.\sin.\frac{1}{2}\alpha$$

Beweis.

Es ist $N \geq 4a.\sin.\frac{1}{2}\alpha$ (Det.)

$$\text{mithin } N^2.\cos.\frac{1}{2}\alpha^2 \geq 4aN.\sin.\frac{1}{2}\alpha.\cos.\frac{1}{2}\alpha^2$$

$$\text{also } N^2 \geq 4aN.\sin.\frac{1}{2}\alpha.\cos.\frac{1}{2}\alpha^2 + N^2\sin.\frac{1}{2}\alpha^2$$

$$\text{folglich } N^2 - 4aN.\sin.\frac{1}{2}\alpha.\cos.\frac{1}{2}\alpha^2 \geq N^2\sin.\frac{1}{2}\alpha^2$$

$$\begin{aligned} \text{somit } N^2 - 4aN.\sin.\frac{1}{2}\alpha.\cos.\frac{1}{2}\alpha^2 + 4a^2\sin.\frac{1}{2}\alpha^2\cos.\frac{1}{2}\alpha^4 \\ \geq \sin.\frac{1}{2}\alpha^2(N^2 + 4a^2\cos.\frac{1}{2}\alpha^4) \end{aligned}$$

$$\text{mithin } N - 2a.\sin.\frac{1}{2}\alpha.\cos.\frac{1}{2}\alpha^2 \geq \sin.\frac{1}{2}\alpha \sqrt{N^2 + 4a^2\cos.\frac{1}{2}\alpha^4}$$

$$\text{also } \frac{N}{2\cos.\frac{1}{2}\alpha} \geq \frac{2a.\sin.\frac{1}{2}\alpha.\cos.\frac{1}{2}\alpha^2 + \sin.\frac{1}{2}\alpha \sqrt{N^2 + 4a^2\cos.\frac{1}{2}\alpha^4}}{2\cos.\frac{1}{2}\alpha}$$

$$\geq \sin.\frac{1}{2}\alpha \frac{2a.\cos.\frac{1}{2}\alpha^2 + \sqrt{N^2 + 4a^2\cos.\frac{1}{2}\alpha^4}}{2\cos.\frac{1}{2}\alpha}$$

d. i. $\left. \begin{matrix} BN \\ PY \end{matrix} \right\} \geq PR$ (Determin.)

Es berührt, oder schneidet also der aus P als Mittelpunkt mit einem Radius = PY beschriebene Kreis die Linien BM, BC. Es geschehe in V. Man ziehe VD, welche verlängert werde bis zum Durchschnitt mit BA in W.

Es ist $BP \cdot PD = BN^2$ (El. II. 6.)

$$= PV^2$$

also $DP:PV = VP:PB$ (El. VI. 17.)

mithin $DVP = PBV$, $VDP = PVB$ (El. VI. 6.)

$$= DBW$$

folglich liegen die Punkte W, B, V, P auf dem Umfang eines Kreises; also ist $PWB + BVP = 2R$ (El. III. 22.)

Nun ist $PDW = DVP + DPV$ (El. I. 32.)

$$= VBP + DPV \text{ (Bew.)}$$

mithin $PDW + PVB = VBP + DPV + PVB$

$$= 2R$$

$$= PWB + PVB$$

also $PDW = PWB$

folglich $DP:PW = WP:PB$ (El. VI. 4.)

und $PW^2 = DP \cdot PB$ (El. VI. 17.)

$$= PY^2$$

somit $PW = PY$

Es liegt also W auf dem Umfang des aus P mit PY beschriebenen Kreises.

Bezeichnet man mit X den zweiten Durchschnitt desselben Kreises mit BM, so ist

$$\underline{XBI = IBV} \text{ (El. I. 34. Cor.)}$$

also $\overline{XB=BV}$ (El. III. 8.)

folglich $\overline{XPB=VPB}$ (El. I. 8.)

mithin $\overline{\text{arc. XI}=\text{arc. VI}}$ (El. III. 26.)

somit $\overline{VPD=DWB}$ (El. III. 22. Cor.)

also $\overline{PV:VD=WB:BD}$ (El. VI. 4.)

Auch ist $\overline{DV:VW=AB:BW}$ (El. VI. 2.)

folglich $\overline{PV:VW=AB:BD}$ (El. V. 23.)

$\overline{PY=MB:BL}$ (El. VI. 2.)

$\overline{BN}$

$\overline{BM}$

mithin $\overline{VW=BL}$

$\overline{N}$

Eben so kann der Beweis für UX geführt werden.

Lehnsatz C. (Fig. 19.)

Jede durch den Halbierungspunkt D der Grundlinie BC eines gleichschenkeligen Dreiecks BAC gezogene, zwischen den Schenkeln BA, AC liegende gerade Linie EF ist gröfser, als die Grundlinie.

Beweis.

Es ist $\overline{DFC < ACD}$ (El. I. 16.)

$\overline{ABD}$ (El. I. 5.)

Macht man $\overline{GBD=DFC}$, so liegt BG zwischen DB, BE.

Es ist also $\overline{GD < DE}$

Auch ist $\overline{\triangle DBG \simeq \triangle DFC}$ (El. VI. 4.)

folglich $\overline{FD:DC=\{BD\}:DG}$
 $\overline{\{CD\}}$

Nun ist $\overline{DCF > R}$ (El. I. 17.)

also $\overline{FD > DC}$ (El. I. 18.)

mithin $CD > DG$

und (auch $FD > DG$)

somit $\frac{FD+DG}{FG} > \frac{2CD}{BC}$ (El. III. 15.)

um so mehr $FE > BC$.

Zus. 1. Gleiche Winkel mit der Grundlinie bildende Linien dieser Art EF, ML sind einander gleich, von zweien ungleiche Winkel mit der Grundlinie bildenden HN, EF ist die den gröfseren Winkel bildende die gröfsere.

Beweis.

Es ist $LDC = EDB$ (p. h.) $= BDM$ (El. I. 15.)

mithin $\triangle LDC \cong \triangle EDB, \triangle BDM \cong \triangle DCF$

also $ED = DL, MD = DF$

folglich $EF = ML$

Macht man $DEK = DHF$,

so ist $\triangle EDK \cong \triangle HDF$ (El. VI. 4.)

also $HD : DF = ED : DK$

Es ist $HD > DF$

also $ED > DK$

folglich $\frac{HD-DK}{2DO} > \frac{FD-DE}{2DP}$, wenn $HO = OK, FP = PE$,

mithin $DO > DP$

somit $DO^2 > DP^2$

$$\text{Da } \left. \begin{array}{l} \text{HD.DK} \\ \text{HO}^2 - \text{OD}^2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{ED.DF (El. VI. 16.)} \\ \text{FP}^2 - \text{PD}^2 \text{ (El. II. 5.)} \end{array} \right.$$

$$\text{so ist } \text{HO}^2 > \text{FP}^2$$

$$\text{also } \text{HO} > \text{FP}$$

$$\text{folglich } \text{HK} > \text{EF}$$

$$\text{um so mehr } \text{HN} > \text{EF.}$$

Zus. 2. Zwey gleiche Linien jener Art bilden gleiche Winkel mit der Grundlinie.

Zus. 3. (Fig. 20.) Wenn durch einen Winkel-
punkt D eines Quadrates, oder Rhombus ABCD zwi-
schen den Schenkeln AB, BC des gegenüberliegenden
Winkels ABC zwey gleiche gerade Linien EF, HG
gezogen sind, so sind die Segmente FB und BH, GB
und BE, GF und HE einander gleich.

Beweis.

$$\text{Macht man } \text{BDM} = \text{R} = \text{BDN},$$

$$\text{so ist } \text{MD} = \text{DN}, \text{FMD} = \text{DNH}$$

$$\text{Auch ist } \text{MDF} = \text{HDN (Zus. 2.)}$$

$$\text{also } \text{MF} = \text{HN}$$

$$\text{Da auch } \text{MB} = \text{BN}$$

$$\text{so ist } \text{FB} = \text{BH}$$

$$\text{Ferner ist } \text{MDG} = \text{NDE (Zus. 2.)}, \text{GMI} = \text{DNE}, \text{MD} = \text{DN}$$

$$\text{folglich } \text{MG} = \text{NE}$$

$$\text{also } \text{FG} = \text{HE}$$

$$\text{somit } \text{GB} = \text{BE}$$

Zus. 4. Da $\triangle MGD \cong \triangle DNE$

so ist $MGD = DEN$

mithin liegen die Punkte G, F, H, E auf dem Umfang eines Kreises. Weil auch $\triangle FDB \cong \triangle HDB$, also $FDB = HDB$, folglich $\text{arc. FL} = \text{arc. LH}$, so liegt der Mittelpunkt desselben in BD. Macht man nun $FO = OE, FOK = R$, so ist $KDN = R$

also $KDO < R$

folglich $KDO + DOK < 2R$

mithin schneiden KD, DO einander in der Verlängerung von BD. Der Mittelpunkt jenes Kreises liegt also in dieser Verlängerung.

Aufgabe IV. (Fig. 21.)

Durch einen Winkelpunkt D eines gegebenen Quadrates, oder Rhombus ABCD, zwischen die Schenkel des gegenüberliegenden Winkels ABC eine gerade Linie zu legen, welche der gegebenen geraden Linie N gleich sey.

Analysis.

EF sey die gesuchte Linie. Macht man $BDM = R = BDN, NDH = FDM$, so ist $EF = GH$ (Lehns. C. Zus. 1.). Da $DB = BD, FBD = DBH, FB = BH$ (Lehns. C. Zus. 3.)

so ist $FD = DH$

Die Punkte G, F, H, E liegen auf dem Umfang eines Kreises, dessen Mittelpunkt K in der Verlängerung von BD liegt (Lehns. C. Zus. 4.). Es sey dieser Kreis beschrieben, und sein Mittelpunkt in K. Zieht man FK, KH, so ist $FK = KH$. Da $KD = DK$, so ist

$$FKD = DKH \text{ (El. I. 8.)}$$

$$\text{also } \text{arc.} FL = \text{arc.} LH$$

$$\text{folglich } \left. \begin{matrix} LKF \\ BKF \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} FEH \\ DEB \end{matrix} \right. \text{ (El. III. 27. 20.)}$$

$$\text{mithin } BF : FK = BD : DE \text{ (El. VI. 4.)}$$

$$\text{Est ist auch } CD : BF = DE : EF \text{ (El. VI. 2.)}$$

$$\text{also } CD : FK = BD : EF \text{ (El. V. 21.)}$$

$$\text{und } CD : DB = KF : FE$$

Da $CD:DB$ ein gegebenes Verhältniß ist (Dat. 1.), so ist auch $KF:FE$ ein gegebenes, und da EF eine gegebene Linie ist, auch KF gegeben (Dat. 2.).

$$\text{Ferner ist } KFB = BDE \text{ (Bew.)}$$

$$= KDF$$

$$\text{also } BK:KF = FK:KD \text{ (El. VI. 4.)}$$

$$\text{folglich } BK:KD = FK^2 \text{ (El. VI. 17.)}$$

mithin $BK.KD$ der Größe nach gegeben, und da $BK = KD = BD$ gegeben ist, BK (Dat. 85.) der Größe nach, somit der Punkt K , und wegen der gegebenen KF der aus K mit KF beschriebene Kreis, und dessen Durchschnittspunkt E mit der Linie BD , also die Lage der Linie EF gegeben.

Determination.

$$\text{Es muß seyn } N \overset{=}{>} MN \text{ (Lehns. C.).}$$

Construction.

Man mache $BQ = N$, $QU \# DA$, $DBX = R$, $XB = BU$, $BY = YD$, beschreibe aus Y als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius $= YX$, welcher die verlängerte BD in K schneide, mache $KV \# BX$, $XV \# BD$, und be-

folglich $\left. \begin{matrix} AB.CF \\ AC.CF \end{matrix} \right\} = EC.BF$ (El. VI. 17.)

$$\begin{aligned} \text{mithin } N^2 + BC^2 &= EC^2 + 2EC.CB + BF^2 \\ &= BH^2 + BH.HG + HG^2, \\ &\quad \text{wenn } AEG = R = EHG, \\ &= (BH + HG)^2 \\ &= BG^2 \end{aligned}$$

Da N, BC gegeben sind, so ist auch BG , mithin AG gegeben, und weil $AEG = R$, so liegt E auf dem Umfange eines der Lage und Grösse nach gegebenen Halbkreises, ist also gegeben (Dat. 28.), somit die Lage von AE gegeben.

Construction.

Man mache $BAK = R$, $AK = N$, beschreibe aus B als Mittelpunkt mit BK als Halbmesser einen Kreis, welcher die verlängerte AB in G schneide, und beschreibe über AG einen Halbkreis, welcher der DC , oder ihrer Verlängerung in E begegne, so ist AE die gesuchte Linie.

Determination.

Damit der über $AG = GB - BA$ beschriebene Halbkreis die verlängerte CD erreiche, muß seyn

$$\begin{aligned} &\underline{AG = 2AB} \\ \text{also } &\underline{BG = 3AB} \\ \text{somit } &\left. \begin{matrix} BG^2 \\ BK^2 \\ KA^2 + AB^2 \\ N^2 \end{matrix} \right\} = 9AB^2 \\ &\underline{\text{folglich } N^2 = \begin{cases} 8AB^2 \\ 4BD^2 \end{cases}} \end{aligned}$$

mithin $N \overset{=}{>} 2BD$,

Beweis.

1) Für die in dem Nebenwinkel von BCD liegende Linie FE.

Es ist $GB = BK$

also $GB > BA$ (El. I. 19.)

folglich $AG > 2AB$

mithin schneidet der über AG beschriebene Halbkreis die CD. Auch ist

$$\begin{aligned} BK^2 &= BG^2 \\ KA^2 + AB^2 &= BH^2 + 2BH.HG + GH^2 \\ N^2 + AB^2 &= EC^2 + \left\{ \begin{array}{l} 2EC.BF \\ 2AB.CF \\ 2BC.CF \\ 2CF^2 + 2BF.FC \end{array} \right\} + BF^2 \quad \begin{array}{l} \text{(El. I. 26.)} \\ \text{(El. VI. 4. 16.)} \end{array} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} EC^2 + CF^2 \\ EF^2 \end{array} \right\} + BC^2 \end{aligned}$$

also $N^2 = EF^2$

mithin $N = EF$

2) Für die in dem Winkel BCD liegende Linie FE.

Es ist $N \overset{=}{>} 2BD$ (Det.)

also $N^2 \overset{=}{>} \begin{cases} 4BD^2 \\ 8AB^2 \end{cases}$

folglich $N^2 + AB^2 \overset{=}{>} 9AB^2$
 BK^2

mithin $BK \overset{=}{>} 3AB$

$$\text{Somit } \left. \begin{array}{l} BK - AB \\ AG \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \right\} 2AB$$

Es berührt, oder schneidet also der über AG beschriebene Halbkreis die CD. Ferner ist, E mag der Berührungs — oder Durchschnittspunkt seyn,

$$\begin{aligned} BK^2 &= BG^2 \\ N^2 + AB^2 &= BH^2 + 2BH.HG + GH^2 \\ &= EC^2 + \left\{ \begin{array}{l} 2BF.EC \\ 2AB.CF \\ 2BC.CF \\ 2EF^2 - 2BF.FC \end{array} \right\} + BF^2 \\ &= \left\{ \begin{array}{l} EC^2 + CF^2 \\ EF^2 \end{array} \right\} + CB^2 \end{aligned}$$

$$\text{also } N^2 = EF^2$$

mithin $N = EF$.

Anm. Es erhellet von selbst, dafs es, wenn der über AG beschriebene Kreis die Linie BC schneidet, immer zwey Durchschnittspunkte giebt, wodurch zwey Linien von der gegebenen Eigenschaft bestimmt werden.

Aufgabe 2. (Fig. 23.)

Durch den Punkt B eines gegebenen Rhombus AEBF eine gerade Linie zu legen, deren zwischen die Schenkel des gegenüberliegenden Winkels, oder die Schenkel seines Nebenwinkels fallendes Segment DC einer gegebenen geraden Linie N gleich sey.

Analysis.

Nimmt man DC als die gesuchte Linie an, so ist $DC : CA = DB : BE$ (El. VI. 4.)

$$CD : DA = CB : \begin{cases} BF \\ BE \end{cases} \quad (\text{El. VI. 2.})$$

$$\begin{aligned} \text{also } CD^2 : DA.AC &= DB.BC : BE^2 \quad (\text{El. V. 20.}) \\ &= GB.BE : BE^2, \text{ wenn } BCG = AFB \\ &\quad \text{oder } = BFC \quad (\text{El. VI. 4. 16.}) \\ &= GB : BE \quad (\text{El. VI. 1.}) \\ &= BG.GN : BE.GN, \text{ wenn } BAN = AFB, \\ &\quad \left\{ \begin{array}{l} BE(GB \begin{cases} - \\ + \end{cases} BN) \\ GB.BE \begin{cases} - \\ + \end{cases} EB.BN \\ CB.BD \begin{cases} - \\ + \end{cases} BA^2 \quad (\text{Bew. und} \\ \quad \quad \quad (\text{El. VI. 4. 16.}) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Beschreibt man durch die Punkte B, G, C einen Kreis, welcher die FC in H schneide, so ist $\angle CGB + \angle CHB = 2R$ (El. III. 22.), oder $\angle CHB = \angle CGB$ (El. III. 21.)
 $= \angle EDB + \angle BDA = \angle BDA$

also ist $\angle CHB = \angle BDA$

Da auch $\angle HAB = \angle BAD$, $AB = BA$,

so ist $HA = AD$, $HB = BD$, $\angle HBA = \angle ABD$

$$\text{folglich } \begin{cases} CB.BH \begin{cases} - \\ + \end{cases} \end{cases} AB^2 = \begin{cases} CA.AH. *) \\ CA.AD \end{cases}$$

$$\text{mithin } CD^2 : DA.AC = BG.GN : CA.AD$$

$$\text{also } CD^2 = BG.GN$$

$$= BG (GB \begin{cases} - \\ + \end{cases} BN)$$

$$= BG^2 \begin{cases} - \\ + \end{cases} GB.BN$$

*) *Newtoni Arithm. univ. Amstel. 1761. Tom. 1. pag. 143 XIV.*

somit $CD^2 + AB^2 = AB^2 + BG^2 \left\{ \begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} GB.BN \\ 2GB.BL \end{smallmatrix} \right\}$, wenn $\frac{ALB}{BA} = \frac{G}{LA}$,
also $BAL = LA$
 $= AG^2$ (El. II. 13.)
 $= AE^2 + EG^2 \left\{ \begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix} \right\} 2GE.EL$

$$\begin{aligned} &\text{folglich } CD^2 + AB^2 - AE^2 = \left\{ \begin{array}{l} EG^2 \left\{ \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \right\}_2 GE.EL \\ EG(GE \left\{ \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \right\}_2 EL) \\ GL^2 - LE^2 \quad (\text{El. II, 6.}) \end{array} \right. \\ (\text{El. II, 13.}) &CD^2 + 2AE^2 - 2BE.EL - AE^2 \\ &CD^2 + \left\{ \begin{array}{l} AE^2 \\ BE^2 \end{array} \right\} - 2BE.EL \\ &CD^2 + BE(BE - 2EL) \\ (\text{El. II, 6.}) &CD^2 + BL^2 - LE^2 \end{aligned}$$

mithin $CD^2 + BL^2 = GL^2$

Da CD , BL , also auf $CD^2 + BL^2$ gegeben sind, so ist GL , somit GB , und da $BCG = BFA$, der über BG des Winkels BFA , fähige Kreisabschnitt der Lage und Grösse nach, also der Durchschnitt C und die Lage von BC gegeben.

Construction.

Man mache $ALB = R = LBK$, $BK = N$, beschreibe aus L als Mittelpunkt mit dem Radius LK einen Kreis, welcher die BE schneide in G , beschreibe über BG einen Kreisabschnitt, fähig { des Winkels BFA }
 { des Nebenwinkels von BFA },
 welcher die FA in C schneide, so ist BC die gesuchte Linie.

Determination.

Damit der über $BG=GL+LB$ beschriebene Abschnitt die FA erreiche, muß, wenn $BM=MG$,

BMT=R, und MT verlängert ist bis zum Durchschnitt mit dem über BG beschriebenen Kreise, seyn $MT \{ \overline{=} \} AL$.

$$\text{Nun ist } \left. \begin{array}{l} BM \\ \frac{1}{2}BG \end{array} \right\} : MT = 1 : \left\{ \begin{array}{l} \cot. \frac{1}{2}MTB \\ \cot. \frac{1}{2}BFA \\ \tan. \frac{1}{2}FAE \\ \tan. \frac{1}{2}V, \text{ zur Abkürzung,} \end{array} \right.$$

$$\text{also } MT = \frac{1}{2}BG \cdot \tan. \frac{1}{2}V.$$

$$\text{Es ist } BG = GL + LB$$

$$= \sqrt{N^2 + BL^2} + LB$$

$$= \sqrt{N^2 + AB^2 \cdot \cos. \frac{1}{2}V^2} + AB \cdot \cos. \frac{1}{2}V$$

$$\text{und } AL = AB \cdot \sin. \frac{1}{2}V$$

Also muß seyn

$$\frac{1}{2}\tan. \frac{1}{2}V \left(\sqrt{N^2 + AB^2 \cdot \cos. \frac{1}{2}V^2} + AB \cdot \cos. \frac{1}{2}V \right) \left\{ \overline{=} \right\} AB \cdot \sin. \frac{1}{2}V$$

$$\text{folglich } \sqrt{N^2 + AB^2 \cdot \cos. \frac{1}{2}V^2} \left\{ \overline{=} \right\} AB \cdot \cos. \frac{1}{2}V$$

welche Bedingung für jeden Werth von N statt findet.

Damit der über $BG = GL - LB$ beschriebene Abschnitt die FA erreiche, muß, wenn $BM = MG$, $BMT = R$, und MT verlängert ist bis zum Durchschnitt mit dem über BG liegenden Kreisbogen seyn $MT \{ \overline{=} \} AL$.

$$\text{Nun ist } BG = \sqrt{N^2 + BL^2} - BL$$

$$= \sqrt{N^2 + AB^2 \cdot \cos. \frac{1}{2}V^2} - AB \cdot \cos. \frac{1}{2}V, \text{ wenn } BFC = V,$$

$$\text{und } BM : MT = 1 : \cot. \frac{1}{2}V.$$

$$\text{folglich } MT = BM \cdot \cot. \frac{1}{2}V$$

$$= \frac{1}{2}BG \cdot \cot. \frac{1}{2}V$$

$$= \frac{1}{2}\cot. \frac{1}{2}V \left(\sqrt{N^2 + AB^2 \cdot \cos. \frac{1}{2}V^2} - AB \cdot \cos. \frac{1}{2}V \right)$$

Auch ist $AL = AB \cdot \sin \frac{1}{2}V$

Also muß seyn

$$\frac{1}{2} \cot \frac{1}{2}V (\sqrt{N^2 + AB^2 \cos^2 \frac{1}{2}V^2} - AB \cos \frac{1}{2}V) \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \right\} AB \sin \frac{1}{2}V$$

$$\text{mithin } \sqrt{N^2 + AB^2 \cos^2 \frac{1}{2}V^2} \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \right\} \frac{2AB \sin \frac{1}{2}V^2 + AB \cos^2 \frac{1}{2}V^2}{\cos \frac{1}{2}V}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \right\} \frac{AB(1 + \sin^2 \frac{1}{2}V^2)}{\cos \frac{1}{2}V}$$

folglich

$$N^2 \cos^2 \frac{1}{2}V^2 + AB^2 \cos^4 \frac{1}{2}V^2 \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \right\} AB^2 + 2AB^2 \sin^2 \frac{1}{2}V^2 + AB^2 \sin^4 \frac{1}{2}V^2$$

somit

$$N^2 \cos^2 \frac{1}{2}V + \left\{ \begin{array}{l} AB^2(\cos^2 \frac{1}{2}V^4 - \sin^2 \frac{1}{2}V^4) \\ AB^2(\cos^2 \frac{1}{2}V^2 + \sin^2 \frac{1}{2}V^2)(\cos^2 \frac{1}{2}V^2 - \sin^2 \frac{1}{2}V^2) \\ AB^2(\cos^2 \frac{1}{2}V^2 - \sin^2 \frac{1}{2}V^2) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \right\} AB^2(1 + 2\sin^2 \frac{1}{2}V^2)$$

$$\text{also } N^2 \cos^2 \frac{1}{2}V^2 \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \right\} AB^2(1 + 2\sin^2 \frac{1}{2}V^2 - \cos^2 \frac{1}{2}V^2 + \sin^2 \frac{1}{2}V^2) \\ \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \right\} AB^2 4 \sin^2 \frac{1}{2}V^2$$

$$\text{folglich } N \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 2AB \tan \frac{1}{2}V \\ \text{OR, wenn } ABR = ABO = R. \end{array} \right.$$

Beweis.

In Beziehung auf $BG = GL + LB$ ist

$$N^2 - AB^2 \cos^2 \frac{1}{2}V^2 > AB^2 \cos^2 \frac{1}{2}V^2$$

$$\text{also } \sqrt{N^2 + AB^2 \cos^2 \frac{1}{2}V^2} + AB \cos \frac{1}{2}V > 2AB \cos \frac{1}{2}V$$

folglich

$$\tan \frac{1}{2} V \left(\sqrt{N^2 + AB^2 \cos \frac{1}{2} V^2} + AB \cos \frac{1}{2} V \right) \left\{ \begin{array}{l} \text{OR} \\ \text{AL} \end{array} \right\} > \left\{ \begin{array}{l} AB \sin \frac{1}{2} V \\ \text{AL} \end{array} \right\}$$

Also giebt es allemal einen Durchschnitt des über BG beschriebenen Kreises mit AF.

In Beziehung auf $BG = GL - LB$ ist

$$N = OR \text{ (Det.)}$$

$$= 2AB \tan \frac{1}{2} V$$

$$\text{also } N \cos \frac{1}{2} V = 2AB \sin \frac{1}{2} V$$

$$\text{somit } N^2 \cos^2 \frac{1}{2} V = 4AB^2 \sin^2 \frac{1}{2} V$$

$$= AB^2 (1 + 2 \sin \frac{1}{2} V^2 - \cos \frac{1}{2} V^2 + \sin \frac{1}{2} V^2)$$

folglich

$$N^2 \cos^2 \frac{1}{2} V + \left\{ \begin{array}{l} AB^2 (\cos \frac{1}{2} V^2 - \sin \frac{1}{2} V^2) \\ AB^2 (\cos \frac{1}{2} V^4 - \sin \frac{1}{2} V^4) \end{array} \right\} = AB^2 (1 + 2 \sin \frac{1}{2} V^2)$$

mithin

$$N^2 \cos^2 \frac{1}{2} V + AB^2 \cos^2 \frac{1}{2} V^4 = AB^2 + 2AB^2 \sin \frac{1}{2} V^2 + AB^2 \sin^2 \frac{1}{2} V^2$$

$$\text{also } N^2 + AB^2 \cos^2 \frac{1}{2} V = \frac{AB^2 (1 + \sin \frac{1}{2} V^2)^2}{\cos^2 \frac{1}{2} V}$$

$$\text{folglich } \sqrt{N^2 + AB^2 \cos^2 \frac{1}{2} V} = \frac{AB (1 + \sin \frac{1}{2} V^2)}{\cos \frac{1}{2} V}$$

$$= \frac{AB (2 \sin \frac{1}{2} V^2 + \cos \frac{1}{2} V^2)}{\cos \frac{1}{2} V}$$

mithin

$$\cot \frac{1}{2} V \left(\sqrt{N^2 + AB^2 \cos^2 \frac{1}{2} V} - AB \cos \frac{1}{2} V \right) \left\{ \begin{array}{l} \text{OR} \\ \text{AL} \end{array} \right\} > \left\{ \begin{array}{l} AB \sin \frac{1}{2} V \\ \text{AL} \end{array} \right\}$$

Also erreicht der über BG beschriebene Kreisbogen die FA.

Es ist $GL^2 = N^2 + BL^2$,

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} GL^2 - LE^2 \\ EG(GE) \left\{ \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \right\} 2EL \\ EG^2 \left\{ \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \right\} 2GE.EL \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} N^2 + BL^2 - LE^2 \\ N^2 + EB(BE - 2EL) \\ N^2 + BE^2 - 2BE.EL \\ N^2 + 2AE^2 - 2BE.EL - AE^2 \\ N^2 + AB^2 - AE^2 \end{array} \right.$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} AE^2 + EG^2 \left\{ \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \right\} GE.EL \\ AG^2 \\ AB^2 + BG^2 + \left\{ \begin{array}{l} 2GB.BL \\ GB.BN \end{array} \right\} \\ AB^2 + BG.GN \end{array} \right\} N^2 + AB^2, \text{ wenn } BAN = AFB,$$

mithin $BG.GN = N^2$

Ferner ist $DC : CA = DB : BE$

$$CD : DA = CB : \left\{ \begin{array}{l} BF \\ BE \end{array} \right.$$

also $CD^2 : CA.AD = CB.BD : BE^2$

$$= GB.BE : BE^2, \text{ wenn } BCG = AFB, \\ \text{oder } = BFC;$$

$$= GB : BE$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} BG.GN \\ N^2 \end{array} \right\} : \left\{ \begin{array}{l} BE.GN \\ BE(GB \left\{ \begin{array}{l} - \\ + \end{array} \right\} BN) \\ EB.BG \left\{ \begin{array}{l} - \\ + \end{array} \right\} EB.BN \\ CB.BD \left\{ \begin{array}{l} - \\ + \end{array} \right\} BA^2 \end{array} \right.$$

Schneidet der über BG beschriebene Kreis die AF zum zweitenmal in H, so ist

$$\begin{array}{lcl} \text{CGB} + \text{CHB} = 2R & & \text{oder } \text{CHB} = \text{CGB} \\ & & = \text{EDB} + \text{BDA} \end{array}$$

$$\text{also } \text{CHB} = \text{BDA} \quad \text{Da } \text{HAB} = \text{BAD}, \text{AB} = \text{BA}$$

$$\text{Da } \text{HAB} = \text{BAD}, \text{AB} = \text{BA}, \quad \text{so ist } \text{HA} = \text{AD}, \text{HB} = \text{BD},$$

$$\text{so ist } \text{HA} = \text{AD}, \text{HB} = \text{BD}, \quad \text{und } \text{HBA} = \text{ABD}$$

$$\text{und } \text{HBA} = \text{ABD} \quad \text{somit } \text{CBA} = \text{ABD}$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} \text{CB.BH} \\ \text{CB.BD} \end{array} \right\} - \text{AB}^2 = \left\{ \begin{array}{l} \text{CA.AH} * \\ \text{CA.AD} \end{array} \right.$$

$$\text{mithin } \text{CD}^2 : \text{CA.AD} = \text{N}^2 : \text{CA.AD}$$

$$\text{somit } \text{CD}^2 = \text{N}^2$$

$$\text{und } \text{CD} = \text{N}$$

Wenn der über BG = GE — EB beschriebene Kreis die AC in C nur berührt, so ist $\text{ACB} = \text{CGB}$ (El. III. 32).
= BDA

$$\text{Da nun auch } \text{CAB} = \text{BAD}, \text{AB} = \text{BA}$$

$$\text{so ist } \text{CA} = \text{AD}, \text{CB} = \text{BD}, \text{CBA} = \text{ABD}$$

etc. wie oben.

Anm. 2. Beide Aufgaben lassen sich auch durch die Behandlung folgender allgemeinen Aufgabe auflösen.

*) (Neut. Arithm. univ. Amstel. 1761. Tom. I. pag. 143. XIV.)

Aufgabe. (Fig. 24.)

Durch einen auf der Halbirungslinie AD eines der Lage und Grösse nach gegebenen Winkels BAC gegebenen Punkt D eine der Grösse nach gegebene gerade Linie zwischen die Schenkel jenes Winkels zu legen.

Analysis.

Es sey BC die gesuchte Linie. Gedenkt man sich durch die Punkte A, B, C einen Kreis, dessen Mittelpunkt T sey, beschrieben, so ist wegen der der Grösse nach gegebenen BC, und des gegebenen Winkels BAC sein Radius der Grösse nach gegeben (El. III. 33.). Zieht man den Durchschnitt R dieses Kreises und der Linie AD mit C zusammen, so ist, wenn RT, TC gezogen werden, sowohl $RT = TC$, als $RTC = 2RAC$ (El. III. 20.) $= BAC$, also gegeben, folglich auch RC gegeben.

Es ist aber $BCR = BAR$ (El. III. 21.)
 $= RAC$

folglich $AR : RC = CR : RD$ (El. VI. 4.)

somit $AR \cdot RD = CR^2$ (El. VI. 16.)

Also ist $AR \cdot RD$ gegeben, und da $AR - RD = AD$ gegeben ist, AR (Dat. 85.), und der Punkt R, somit auch der Punkt C, in welchem ein aus R als Mittelpunkt mit einem Radius $= RC$ beschriebener Kreis die Linie AC erreicht, folglich auch die Lage von BC gegeben.

Construction.

Man mache $DE =$ der gegebenen Linie, beschreibe über DE einen des Winkels BAC fähigen Kreis-

abschnitt (El. III. 33.), dessen Mittelpunkt F sey, halbire den Winkel EFD durch den Radius FH, ziehe DH, mache $GDL=R$, $LD=DH$, $AU=UD$, beschreibe aus U als Mittelpunkt mit einem Radius $=UL$ einen Kreis, welcher die verlängerte AD in R schneide, mache $DAK=R$, $LK \nparallel AD$, und beschreibe aus R als Mittelpunkt mit RK einen Kreis, welcher die AC in C erreiche. Die gerade Linie CD wird die gesuchte Linie bestimmen.

Determination.

Damit der zuletzt beschriebene Kreis die AC erreiche, mufs, wenn $RQA=R$, seyn $RK \left. \begin{matrix} DL \\ DH \end{matrix} \right\} \equiv RQ$.

$$\text{Es ist } \left. \begin{matrix} HD : DG \\ HD : \frac{1}{2}DE \\ HD : \frac{1}{2}N \end{matrix} \right\} = 1 : \left\{ \begin{matrix} \sin. GHD \\ \cos. \frac{1}{2}HFD \\ \cos. \frac{1}{2}BAC \\ \cos. \frac{1}{2}\alpha, \text{ wenn } BAC=\alpha; \end{matrix} \right.$$

$$\text{also } HD = \frac{N}{2\cos. \frac{1}{2}\alpha}$$

$$\text{Ferner } \left. \begin{matrix} AR.RD \\ AR(RA-AD) \\ AR(RA-a) \\ AR^2-a.AR \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} DH^2 \text{ (El. II. 6.)} \\ N^2 \\ 4\cos. \frac{1}{2}\alpha^2, \text{ wenn } AD=a; \end{matrix} \right.$$

$$\text{also } AR^2 - a.AR + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{N^2}{4\cos. \frac{1}{2}\alpha^2}$$

$$= \frac{a^2\cos. \frac{1}{2}\alpha^2 + N^2}{4\cos. \frac{1}{2}\alpha^2}$$

$$\text{folglich } AR = \frac{a \cos \frac{1}{2} \alpha + \sqrt{a^2 \cos^2 \frac{1}{2} \alpha + N^2}}{2 \cos \frac{1}{2} \alpha}$$

$$\text{Es ist } AR : RQ = 1 : \sin \frac{1}{2} \alpha$$

$$\text{mithin } RQ = \frac{a \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha + \sin \frac{1}{2} \alpha \sqrt{a^2 \cos^2 \frac{1}{2} \alpha + N^2}}{2 \cos \frac{1}{2} \alpha}$$

Also muß werden

$$\frac{N}{2 \cos \frac{1}{2} \alpha} = \frac{a \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha + \sin \frac{1}{2} \alpha \sqrt{a^2 \cos^2 \frac{1}{2} \alpha + N^2}}{2 \cos \frac{1}{2} \alpha}$$

$$\text{folglich } N = a \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha + \sin \frac{1}{2} \alpha \sqrt{a^2 \cos^2 \frac{1}{2} \alpha + N^2}$$

$$\text{also } N^2 = 2a N \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha + a^2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha \cos^2 \frac{1}{2} \alpha$$

$$= \sin^2 \frac{1}{2} \alpha (a^2 \cos^2 \frac{1}{2} \alpha + N^2)$$

$$\text{mithin } \left. \begin{array}{l} N^2 (1 - \sin^2 \frac{1}{2} \alpha) \\ N^2 \cos^2 \frac{1}{2} \alpha \end{array} \right\} = 2a N \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha$$

$$\text{somit } N = \frac{2a \sin \frac{1}{2} \alpha}{\cos \frac{1}{2} \alpha}$$

$$= 2a \tan \frac{1}{2} \alpha$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{PS, wenn ADP = ADS = R.} \end{array} \right.$$

Beweis.

$$\text{Es ist } N \geq \left\{ \begin{array}{l} \text{PS (Det.)} \\ 2a \tan \frac{1}{2} \alpha \end{array} \right.$$

$$\text{also } N^2 \cos^2 \frac{1}{2} \alpha \geq 2a N \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha$$

$$\text{folglich } N^2 \geq 2a N \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha + N^2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha$$

$$\text{mithin } N^2 = 2a N \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha + a^2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha \cos^2 \frac{1}{2} \alpha$$

$$= a^2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha \cos^2 \frac{1}{2} \alpha + N^2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha$$

$$\text{somit } N = a \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha + \sin \frac{1}{2} \alpha \sqrt{a^2 \cos^2 \frac{1}{2} \alpha + N^2}$$

$$\text{also } \frac{N}{2\cos\frac{1}{2}\alpha} \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha(a\cos\frac{1}{2}\alpha + \sin\frac{1}{2}\alpha \sqrt{a^2\cos^2\frac{1}{2}\alpha + N^2})}{2\cos\frac{1}{2}\alpha} \\ \frac{RA\sin\frac{1}{2}\alpha}{RQ} \end{array} \right.$$

Es erreicht also der aus R als Mittelpunkt mit einem Radius = RK beschriebene Kreis die Linie AC. Es geschehe in C, so ist $AR \cdot RD = RC^2$

$$\text{also } \overline{AR : RC = CR : RD} \text{ (El. VI. 17.)}$$

$$\text{folglich } \overline{DCR = RAC} \text{ (El. VI. 6.)}$$

$$= RAB$$

mithin liegen die Punkte B, A, C, R auf dem Umfang eines Kreises. Bezeichnet man seinen Mittelpunkt mit T, so ist $RTC = 2RAC$

$$= BAC$$

$$= HFD$$

$$\text{Da auch } \overline{DH = RC}$$

$$\text{so ist } \overline{HF = RT}$$

$$\text{folglich } \overline{EF = TR, FD = TC}$$

$$= TB$$

$$\text{Und da } \left. \begin{array}{l} 2RTC \\ BTC \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 2HFD \\ EFD \end{array} \right.$$

$$\text{so ist } \overline{ED = BC}$$

Zus. Es erhellet von selbst, dafs es, wenn der aus R mit R mit RK beschriebene Kreis die AC schneidet, eine zweite Linie von der verlangten Eigenschaft giebt. Und beschreibt man aus dem zweiten Durchschnitt R des aus U mit UL beschriebenen Kreises und der verlängerten AC einen Kreis mit der dadurch bestimmten RK, so werden die in die Schenkel der Nebenwinkel des Winkels BAC fallenden Linien BC bestimmt, welche dieselbe Eigenschaft haben, wie die vorhin gefundenen, wie auf ganz ähnlichem Wege bewiesen wird.

Das APOLLONIUS von PERG.

Der Bücher

de inclinationibus

Zweites.

1874

Journal of the

...

...

...

...

...

...

...

...

...

de inclinationibus

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

Des APOLLONIUS von PERGA

ZWEITES BUCH

DE INCLINATIONIBUS.

Aufgabe I. (Fig. 25 — 34.)

Zwischen zwey concentrische Kreise, deren auf einer geraden Linie liegende Durchmesser AB, CD der Lage und Grösse nach gegeben sind, von einem gegebenen Punkte dieser Durchmesser, oder ihrer Verlängerung eine einer gegebenen geraden Linie N gleiche gerade Linie zu legen.

Fall 1. (Fig. 25. 26.)

Der gegebene Punkt liegt in dem Endpunkte B des grösseren Durchmessers. Die gesuchte Linie soll, wenn BNM eine den kleineren Kreis in N berührende, den grösseren in M schneidende gerade Linie ist, liegen zwischen den Bogen AM, CN in Fig. 25. oder in Fig. 26.

Analysis.

Es sey FG die gesuchte Linie. Fällt man vordem gemeinschaftlichen Mittelpunkte E der Kreise das Perpendikel

EO auf BF, so ist $FO=OB, GO=OH$ (El. III. 3.)

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} FG \\ N \end{array} \right\} = BH$$

folglich ist BH der Grösse und (Dat. 28.) der Lage nach gegeben.

Determination.

Es ist, wenn die den kleineren Kreis in K schneidende Linie EF gezogen wird,

$$\text{(Fig. 25.) } FG > \left\{ \begin{array}{l} FK \text{ (El. III. 8.),} \\ AC \end{array} \right. HB < \left\{ \begin{array}{l} BN \text{ (El. III. 8.)} \\ MN \text{ (El. III. 18. 3.)} \end{array} \right.$$

$$\text{Also mu\ss } N \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \right\} AC, N \left\{ \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \right\} MN \text{ seyn.}$$

Es ist hingegen (Fig. 26.)

$$GF < \left\{ \begin{array}{l} FK \text{ (El. III. 8.),} \\ AC \end{array} \right. HB > \left\{ \begin{array}{l} BN \text{ (El. III. 8.)} \\ MN \text{ (El. III. 18. 3.)} \end{array} \right.$$

$$\text{Also mu\ss } N \left\{ \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \right\} AC, N \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \right\} MN \text{ seyn.}$$

Construction.

Man beschreibe aus B als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius $=N$. Der Punkt, in welchem derselbe mit dem kleineren Kreise zusammentrifft, wird die gesuchte Linie bestimmen.

Beweis.

$$\text{Es ist (Fig. 25.) } N \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} AC \\ BD \end{array} \right., N \left\{ \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} MN \text{ (Det.),} \\ BN \end{array} \right.$$

$$\text{hingegen (Fig. 26.) } N \left\{ \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} AC \\ BD \end{array} \right., N \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} MN \text{ (Det.)} \\ BN \end{array} \right.$$

Also erreicht der aus B als Mittelpunkt mit einem Radius $=N$ beschriebene Kreis den kleineren in D

oder N, oder in einem Punkte H zwischen B, N. Im ersten Fall ist AC, im zweiten MN die gesuchte Linie, wie von selbst erhellet. Im dritten ist, wenn BH den Kreis über AB in F, G schneidet,

$$\begin{array}{l} FO=OB, GO=OH, \text{ wenn } EOB=R, \\ \text{also } FG = \begin{cases} BH \\ N \end{cases} \end{array}$$

Fall 2. (Fig. 27. 28.)

Der gegebene Punkt liegt in dem Endpunkte B des kleineren Durchmessers. Die gerade Linie soll, wenn MB auf AB perpendicular steht, und den grösseren Kreis in M, N schneidet, liegen zwischen den Bogen CM, AFB in Fig. 27. oder 28.

Analysis.

Es sey FG die gesuchte Linie. Fällt man von dem Mittelpunkte E das Perpendikel EO auf BF, so ist $FO=OB, GO=OH$

$$\text{also } FG = \begin{cases} BH \\ N \end{cases}$$

folglich ist BH der Grösse und (Dat. 28.) der Lage nach gegeben.

Determination.

Zieht man durch G, E eine gerade Linie, welche den kleineren Kreis in K schneide, so ist

$$\text{(Fig. 27.) } FG > \begin{cases} GK, HB \\ AC, FG \end{cases} < BN \quad (\text{El. III. 8.})$$

$$\text{also mu\ss } N \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} AC, N \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} BN \text{ seyn.}$$

$$\text{(Fig. 28.) } FG < \begin{cases} GK, HB \\ AC, FG \end{cases} > BN$$

$$\text{also mu\ss } N \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} AC, N \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} BN \text{ seyn.}$$

Construction.

Man beschreibe aus B als Mittelpunkt mit einem Halbmesser = N einen Kreis. Der Punkt, in welchem derselbe den grösseren Kreis erreicht, wird die gesuchte Linie bestimmen.

Beweis.

Es ist (Fig. 27.) $N \leq \begin{cases} AC, \\ BD \end{cases}$ $N \leq BN$

hingegen (Fig. 28.) $N \geq \begin{cases} AC, \\ BD \end{cases}$ $N \geq BN$,

also erreicht der aus B als Mittelpunkt mit einem Radius = N beschriebene Kreis den grösseren Kreis in D, oder in N, oder in einem Punkte H zwischen D, N. Im ersten Fall ist AC, im zweiten BM die gesuchte Linie, wie von selbst erhellet. Im dritten ist, wenn BH den Kreis über AB in F, G schneidet, FO = OB, GO = OH, wenn EOF = R,

$$\text{also } FG = \begin{cases} BH \\ N \end{cases}$$

Fall 3. (Fig. 29. 30.)

Der gegebene Punkt F liegt auf der Verlängerung des grösseren Durchmessers. Die gesuchte Linie soll, wenn FN den kleineren Kreis in N berührt, und verlängert den grösseren in Q schneidet, liegen zwischen den Bogen AQ, CN in Fig. 29. oder Fig. 30.

Analysis.

Es sey HK die gesuchte Linie. Zieht man durch H und den Mittelpunkt E die gerade Linie HE, welche den kleineren Kreis in O, P schneide, so ist

$$PH \cdot HO = HE^2 - EO^2 \quad (\text{El. II. 6.})$$

$$\text{El. III. 36.}) \quad KH \cdot HM$$

also ist das Rechteck KH.HM der Grösse nach gegeben. Da nun auch $KH=N$ gegeben ist, so ist HM (Dat. 2), mithin $\left\{ \begin{array}{l} MH + \{ HK \\ ML \} \\ HL \end{array} \right\}$ gegeben, folglich die

Aufgabe auf Buch I. Aufgabe 1. reducirt.

Determination.

Es ist (Fig. 29.) $HK > \left\{ \begin{array}{l} HO, \\ AC \end{array} \right.$ (El. III. 8.)

und $KH.HM = EH^2 - EO^2$
 $= EQ^2 - EN^2$, wenn man EQ, EN zieht,
 $= QN^2$

also $HM : QN = QN : KH$ (El. VI. 17.)

Nun ist $HF > FQ, MF < FN$ (El. III. 8.)

folglich $\left\{ \begin{array}{l} HF - FM \\ HM \end{array} \right\} > \left\{ \begin{array}{l} QF - FN \\ QN \end{array} \right.$

mithin auch $QN > KH$ (El. V. 14.)

also muss $N \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \right\} AC, N \left\{ \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \right\} QN$ seyn.

Es ist (Fig. 30.) $KH < \left\{ \begin{array}{l} HO \\ AC \end{array} \right.$ und $HF > FQ, KF < FN$

mithin $\left\{ \begin{array}{l} HF - FK \\ HK \end{array} \right\} > \left\{ \begin{array}{l} QF - FN \\ QN \end{array} \right.$

also muss $N \left\{ \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \right\} AC, N \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \right\} QN$ seyn.

Construction.

Man errichte in C auf AC ein Perpendikel CU, welches verlängert werde bis zum Durchschnitt mit dem gröfseren Kreise in U, mache $AX=N, XW \parallel CU$, verlängere XW bis zum Durchschnitt mit dem gröfseren Kreise in W, ziehe $UV \parallel CB$, der Durchschnitt

$$\begin{array}{l} \text{(El. VI. 17.)} \quad \left. \begin{array}{l} AX \cdot XY \\ XV^2 \\ CU^2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} (\frac{1}{2}AY)^2 \text{ (El. II. 5.)} \\ AZ^2 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\text{also } CU \left\{ \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \right\} AZ$$

$$\text{folglich } EC \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \right\} EZ$$

mithin fällt die Tangente FG mit der Tangente FN zusammen, in welchem Falle QN die verlangte Linie ist, wie von selbst erhellet, oder sie schneidet den kleineren Kreis in zwey Punkten K, M. Verlängert man FG bis zum Durchschnitt mit dem gröfseren Kreise in H, und zieht durch H, E die den kleineren Kreis in O, P schneidende gerade Linie, so ist

$$KH \cdot HM = OH \cdot HP \text{ (El. III. 36.)}$$

$$= HE^2 - EO^2 \text{ (El. II. 6.)}$$

$$= UE^2 - EC^2$$

$$= UC^2$$

$$= VX^2$$

$$= AX \cdot XY$$

$$\begin{array}{l} \text{Nun ist auch } HL \\ HM + \left\{ \begin{array}{l} ML \\ KH \end{array} \right\} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} AT \\ AY \\ AX + XY \end{array} \right.$$

$$\text{also } HK = \left\{ \begin{array}{l} AX \\ N \end{array} \right.$$

Anm. Es erhellet von selbst, dafs auch die Linien LM, RN, DB, welche zwischen den Bogen DBR, DN liegen, dieselben Eigenschaften haben, wie HK, QN, AC, und dafs sie auf demselben Wege, wie die letztgenannten, und von denselben unabhängig, gefunden werden können.

Fall 4. (Fig. 31. 32.)

Der gegebene Punkt F liegt zwischen beiden Kreisen. Die gesuchte Linie soll, wenn FN den kleineren Kreis in N berührt und verlängert den größeren in Q schneidet, liegen zwischen den Bogen AQ, CN in Fig. 31. oder Fig. 32.

Anal. Det. Constr. Bew. und Anm. buchstäblich wie Fall 3.

Fall 5. (Fig. 33. 34.)

Der gegebene Punkt F liegt innerhalb des kleineren Kreises. Die gesuchte Linie soll, wenn auf AF in F ein den kleineren und größeren Kreis in N, Q schneidendes Perpendikel errichtet wird, liegen zwischen den Bogen AQ, CN in Fig. 33. oder Fig. 34.

Analysis.

Es sey HK die gesuchte Linie. Zieht man durch H und den Mittelpunkt E die gerade Linie HE, welche den kleineren Kreis in O, P schneide, so ist

$$\left. \begin{array}{l} PH \cdot HO \\ KH \cdot HM \end{array} \right\} = HE^2 - EO^2 \text{ (El. II. 6.)}$$

also ist das Rechteck KH, HM der Gröfse nach gegeben. Da nun auch KH = N gegeben ist, so ist HM (Dat. 2.), somit $\left. \begin{array}{l} KH \\ ML \\ HL \end{array} \right\} + HM$ gegeben, mithin

die Aufgabe auf Buch I. Aufg. 1. zurückgeführt.

Determination.

Es ist (Fig. 33.) $KH > \begin{cases} HO \\ AC \end{cases}$

und $KH \cdot HM \} = HE^2 - EO^2$

$HG^2 - GK^2 \} = QE^2 - EN^2$, wenn EGQ = R,
und EQ, EN gezogen sind,

$$= QF^2 - FN^2 \text{ (El. I. 47.)}$$

Nun ist $EG < EF$ (El. I. 19.)

also $KM > IN$ (El. III. 15.), wenn QF den kleineren Kreis in I schneidet.

folglich $GK > FN$

mithin $GK^2 > FN^2$

somit $GH^2 > FQ^2$

und $GH > FQ$

also $HG + GK \} > \{ QF + FN$

$HM \} \{ RN$, wenn QF den grös-

seren Kreis in R schneidet.

Da aber $KH \cdot HM = QF^2 - FN^2$

$$= RN \cdot NQ \text{ (El. II. 5.)}$$

so ist $KH : QN = RN : HM$ (El. VI. 16.)

folglich $QN > KH$ (El. V. 14.)

mithin muss $N \overset{>}{=} AC, N \overset{<}{=} QN$ seyn.

In Fig. 34 ist $HK < \left\{ \begin{array}{l} HO \text{ und } KH \cdot HM \\ AC \quad HG^2 - GK^2 \end{array} \right\} = EH^2 - EO^2$

wenn $EGK = R$, u. EQ, GN gezogen sind, $= QF^2 - FN^2$

Nun ist $GE < EF$

also $KM > TN$

folglich $GK > FN$

mithin $GK^2 > FN^2$

somit $GH^2 > FQ^2$

und $GH > FQ$

$$\text{als } \left. \begin{array}{l} HG + GK \\ HK \end{array} \right\} > \left\{ \begin{array}{l} QF + FN \\ QN \end{array} \right.$$

folglich muß $N \overset{=}{<} AC, N \overset{=}{>} QN$ seyn.

Constr. Buchstäblich, wie zu Fall 3.

B e w e i s.

$$\text{Es ist (Fig. 33.) } \left. \begin{array}{l} N \\ AX \end{array} \right\} \overset{=}{>} AC, \left. \begin{array}{l} N \\ AX \end{array} \right\} \overset{=}{<} QN$$

also $AX < AE$

$$\text{und (Fig. 34.) } \left. \begin{array}{l} N \\ AX \end{array} \right\} \overset{=}{<} AC, \left. \begin{array}{l} N \\ AX \end{array} \right\} \overset{=}{>} QN$$

also $AX > AD$

$$\text{folglich } XV \overset{=}{<} XW$$

$$\text{mithin } AVB \overset{=}{>} \left\{ \begin{array}{l} AWB \\ AVY \end{array} \right.$$

$$\text{somit } AY \overset{=}{<} AB$$

Es läßt sich also eine Sehne $= AY$ in den größeren Kreis legen. Ist sie $= AB$, so ist AC die gesuchte Linie, wie von selbst erhellet. Ist sie $< AB$, wie AT , so ist $AX \cdot XY = VX^2$

$$\begin{aligned} AS \cdot ST &= CU^2 && \text{wenn } SA = AX, \\ &= UE^2 - EC^2 \\ &= QE^2 - EN^2 \end{aligned}$$

Der aus E als Mittelpunkt mit einem Radius $= EZ$ beschriebene Kreis schneidet mithin die Linie EF in F, oder zwischen E, F. Im ersten Fall ist QN die gesuchte Linie, wie von selbst erhellet. Im zweiten läßt sich von F aus an jenen Kreis eine Tangente FG legen, welche den kleineren Kreis in K, M, den gröfseren in H, L schneide. Es ist, wenn die den kleineren Kreis in O, P schneidende gerade Linie HE gezogen wird, $KH.HM = EH^2 - EO^2$
 $= HE^2 - EC^2$
 $= CU^2$
 $= VX^2$

$$= AX.XY$$

$$\text{Da auch } \begin{cases} HL = AT \\ KH + HM = AY \\ \quad \quad \quad AX + XY \end{cases}$$

$$\text{so ist } KH = \frac{AX}{N}$$

Anm. Es erhellet von selbst, daß auch die Linien LM, RI, DB, welche zwischen den Bogen BR, DI liegen, dieselben Eigenschaften haben, wie HK, QN, AC, und daß sie auf demselben Wege, wie die letztgenannten, und ganz unabhängig von denselben gefunden werden können.

Allgemeine Anm. Da ein Kreis einen anderen zweimal schneidet, und sich von einem Punkte außerhalb eines Kreises zwey Tangenten an denselben ziehen lassen, so giebt es immer eine zweite Linie von der gegebenen Eigenschaft, wenn sie durch den Durchschnitt zweier Kreise, oder durch Ziehung einer jener Tangenten bestimmt wird.

Aufgabe II. (Fig. 35.—75.)

Zwischen zwey nicht concentrische Kreise, deren auf einer geraden Linie liegende Durchmesser der Lage und Gröfse nach gegeben sind, von einem Endpunkte dieser Durchmesser aus eine gerade Linie zu legen, welche einer gegebenen geraden Linie N gleich sey.

Fall 1. (Fig. 35—42.)

Die Kreise berühren einander

A) Inwendig. (Fig. 35—39.) Die gerade Linie soll gezogen werden

a) von dem Berührungspunkte A aus. (Fig. 35.)

Analysis.

Es sey DE die gesuchte Linie. Zieht man die Punkte D, E mit den Endpunkten C, B der Durchmesser durch gerade Linien zusammen, so ist

$$ADC = AEB \text{ (El. III. 31.)}, DAC = EAB,$$

$$\text{also } DA : AC = EA : AB \text{ (El. VI. 4.)}$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} EA - AD \\ DE \\ N \end{array} \right\} : \left\{ \begin{array}{c} BA - AC \\ BC \end{array} \right. \text{ (El. V. 19.)}$$

folglich ist (Dat. 2.) DA der Gröfse und (Dat. 28.) der Lage nach gegeben.

Determination.

Da $DA:AC = DE:BC$ (Anal.), und $DA < AC$ (El. III, 15.)

$$\text{so ist } DE < BC$$

also muß $N = BC$ seyn.

Construction.

Man mache $ACF=R$, $FC=CB$, $CG=N$, ziehe AF , $GH \parallel AC$, $HK \parallel CF$, beschreibe aus A als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius $=AK$. Der Punkt, in welchem derselbe mit dem kleineren Kreise zusammenkommt, wird die gesuchte Linie bestimmen.

Beweis.

$$\text{Es ist } \left. \begin{array}{l} N \\ CG \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} BC \\ CF \end{array} \right.$$

$$\text{also } AK \left\{ \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \right\} AC$$

Der aus A als Mittelpunkt mit einem Radius $=AK$ beschriebene Kreis erreicht also den kleineren Kreis in C , oder in einem Punkte D zwischen A, C . Im ersten Fall ist CB die gesuchte Linie, wie von selbst erhellet. Im zweiten ist, wenn DC, EB gezogen werden,

$$\left. \begin{array}{l} DA \\ AK \\ (El. VI. 4.) KH: \left\{ \begin{array}{l} CF \\ CB \end{array} \right\} \end{array} \right\} : AC = \left\{ \begin{array}{l} EA : AB \\ \left\{ \begin{array}{l} EA-AD \\ DE \end{array} \right\} : \left\{ \begin{array}{l} BA-AC \\ BC \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} KH \\ CG \\ N \end{array} \right\} = DE$$

b.) von dem anderen Endpunkte D des grösseren Durchmessers (Fig. 36. 37.). Die gesuchte Linie soll, wenn DZ den kleineren Kreis in Z berührt, den grösseren in S schneidet, zwischen den Bogen SB, BZ (Fig. 36.), oder SB, AZ (Fig. 37.) liegen.

Analysis.

Es sey TU die gesuchte Linie, welche den kleineren Kreis in V schneide. Macht man $AY=YB$, $AWD=YXD=R$, und zieht BU, so ist

$$BY : YA = UX : XW \quad (\text{El. VI. 2.})$$

$$\text{also } UX = XW$$

$$\text{folglich } TU = WV$$

Ferner ist $AD : DB = WD : DU \quad (\text{El. VI. 2.})$

$$N : P = VD - TU : DT + TU, \quad \text{wenn}$$

$$AD : DB = N : P,$$

$$= VD - N : DT + N$$

$$\text{mithin } AD : DB = VD : DT + N + P \quad (\text{El. V. 12.})$$

$$(\text{El. VI. 1.}) AD \cdot DB : BD^2 = VD \cdot DT : DT(DT + N + P)$$

$$\text{also } BD^2 = DT(DT + N + P) \quad (\text{El. III. 36.})$$

folglich ist das Rechteck $DT(DT + N + P)$ der Grösse nach gegeben. Da auch $(DT + N + P) - DT = N + P$ gegeben ist (Dat. 2.3.), so ist DT (Dat. 85.) der Grösse und (Dat. 28.) der Lage nach gegeben.

Determination.

Es ist (Eig. 36.) $DB > BA$

$$\text{also } DB > BA$$

$$B\beta > BY, \quad \text{wenn } B\beta = \beta D,$$

$$\text{folglich } SY > YU \quad (\text{El. III. 7.})$$

$$\text{mithin } YS^2 > YU^2$$

$$(\text{El. I. 47.}) YZ^2 + ZS^2 > VU \cdot UT + YZ^2 \quad (\text{El. II. 6. III 36.})$$

$$\text{somit } ZS^2 > VU \cdot UT$$

$$\text{also } VU : ZS < SZ : TU \quad (\text{Hauberl. c. §. 53.})$$

Nun ist $UD > DS, VD < DZ$ (El. III. 8.)

folglich $\frac{UD-DV}{VU} > \frac{SD-CZ}{SZ}$

mithin $SZ > TU$ (Hauber l. c. §. 11.)

also muß $N = \frac{SZ}{<} SZ$ seyn.

Es ist (Fig. 37.)

$UD > DS, TD < DZ$ auch $BD > DU, AD < DF$

folglich $\frac{UD-DT}{TU} > \frac{SD-DZ}{SZ} > \frac{BD-DA}{AB} > \frac{UD-DT}{YU}$

also muß $N = SZ, N = AB$ seyn.

Construction.

Man mache $EDB = BDP = R$, $ED = DB = DP$, $DN = N$, $NL \# AE$, $LM \# DN$, $NM \# DE$, $ON = NM$, $DOQ = R$, $PQ \# DB$, beschreibe über QE als Durchmesser einen Kreis, welcher die verlängerte BD in R schneide, und aus D als Mittelpunkt mit einem Radius $= DR$ einen zweiten. Der Durchschnitt desselben mit dem kleineren Kreise wird die gesuchte Linie bestimmen.

Beweis.

Es ist (Fig. 36.) $DR \cdot RO = OQ \cdot DE$ *)

$= PD \cdot DE$ (Constr.)

$= DB^2$ (Constr.)

also $RO : DB = BD : DR$ (El. VI. 17.)

*) Des Apollonius von Perga Bücher *de Sectione determinata*, (2. ed. Frey bearbeitet von Diesterweg, Bonn 1822, pag. 5.)

Es ist aber $OR > RD$

folglich auch $BD > DR$ (El. II. 5.)

In Fig. 37. ist $N = AB$

$$\text{also } ND(BD + DA) = \begin{cases} (BD - DA)(BD + DA) \\ BD^2 - DA^2 \text{ (El. II. 5.)} \end{cases}$$

$$\text{folglich } DA^2 + \begin{cases} ND \cdot DB \\ AD \cdot DL \end{cases} + ND \cdot DA = \begin{cases} BD^2 \\ DR \cdot RO \\ R\alpha^2 - \alpha D^2, \end{cases} \quad \text{wenn } D\alpha = \alpha O,$$

$$\text{mithin } AD^2 + 2\alpha D \cdot DA + D\alpha^2 = R\alpha^2$$

$$\text{somit } AD + D\alpha = R\alpha$$

$$\text{und } AD = \begin{cases} R\alpha - \alpha D \\ DR \end{cases}$$

Ferner ist $SZ = N$ (Det.), wenn das

(obere)
(untere) Zeichenpaar sich auf Fig. (36.)
(38.) bezieht, und DZ
den kleineren Kreis in Z berührt, den größeren in
S schneidet,

$$\text{mithin } DZ + D\alpha = R\alpha$$

$$\begin{array}{l} \text{also } SZ : ZD \\ \text{wenn } BY = YA, BY : YD \\ \quad 2BY : 2YD \\ BD - DA : BD + DA \end{array} \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \\ = \\ < \end{array} \right\} ND : DZ \quad (\text{El. V. 8.}) \\ (\text{El. III. 31. 16.})$$

$$\text{Es ist auch } AD : \left\{ \begin{array}{l} DE \\ DB \end{array} \right\} = ND : DL \quad (\text{El. VI. 2.})$$

$$\text{also } AD + DB : AD = \left\{ \begin{array}{l} ND + DL \\ 2\alpha D \end{array} \right\} : DN \quad (\text{El. V. 18.})$$

$$\text{folglich } BD - DA : AD \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \\ = \\ < \end{array} \right\} 2\alpha D : DZ \quad (\text{El. V. 21. Hauber §. 32.})$$

$$\text{mithin } AD : DB \left\{ \begin{array}{l} = \\ < \\ = \\ > \end{array} \right\} DZ : 2\alpha D + DZ \quad (\text{El. V. 18. und Hauber §. 19. 5.})$$

$$\begin{array}{l} \text{somit } AD : DZ \\ (\text{El. II. 36. VI. 17.}) ZD : DB \end{array} \left\{ \begin{array}{l} = \\ < \\ = \\ > \end{array} \right\} BD : 2\alpha D + DZ \quad (\text{El. V. 16. und Hauber §. 43.})$$

$$\text{also } DZ^2 + 2\alpha D \cdot DZ \left\{ \begin{array}{l} = \\ < \\ = \\ > \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} BD^2 \\ R\alpha^2 - \alpha D^2 \end{array} \right\} \quad (\text{El. VI. 17. und Hauber §. 53.})$$

$$\text{folglich } DZ^2 + 2\alpha D \cdot DZ + D\alpha^2 \left\{ \begin{array}{l} = \\ < \\ = \\ > \end{array} \right\} R\alpha^2$$

$$\text{mithin } ZD + D\alpha \left\{ \begin{array}{l} = \\ < \\ = \\ > \end{array} \right\} R\alpha$$

sonit DZ $\left\{ \begin{array}{l} = \\ > \\ = \\ < \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} R\alpha - \alpha D \\ DR \end{array} \right.$

Der aus D als Mittelpunkt mit einem Radius $=DR$ beschriebene Kreis schneidet also den kleineren Kreis in Z, oder in einem Punkte T zwischen {B, Z Fig. {36.}}. Im ersten Fall ist SZ die gesuchte {A, Z {37.}} Linie, wie von selbst erhellet. Zieht man im anderen DT, welche den kleineren und grösseren Kreis in V, U schneide, so ist

$$\begin{aligned} BD^2 &= DR \cdot RO \\ &= DR(RD + DN + NO) \end{aligned}$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} AD \cdot DB : BD^2 \\ AD : DB \\ ND : \left\{ \begin{array}{l} DL \\ N \end{array} \right\} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} VD \cdot DT : DR(RD + DN + NO) \\ VD : RD + DN + NO \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{mithin } AD : DB \\ \text{(El. VI. 2.) } WD : DU \\ VD - TU : DT + TU \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} VD - DN : RD + DN \text{ (El. V. 19.)} \\ \text{wenn } AWD = R, \text{ und BU ge-} \\ \text{zogen wird,} \\ \text{weil } WX : XU = AY : YB, \\ \text{wenn } DXY = R \end{array} \right.$$

$$\text{also } \underline{WX = XU}$$

$$\text{folglich } \underline{VW = TU}$$

$$\text{also } \underline{VD + DT : DT + TU = VD + DR : RD + DN \text{ (El. V. 18.)}}$$

$$\text{folglich } \underline{DT + TU = RD + DN \text{ (El. V. 9.)}}$$

$$\text{mithin } TU = \left\{ \begin{array}{l} ND \\ N \end{array} \right.$$

c) Von dem anderen Endpunkte D des kleineren Durchmessers (Fig. 38. 39.). Die gesuchte Linie soll, wenn das in D auf AD errichtete Perpendikel den grösseren Kreis in Z schneidet, zwischen die Bogen BZ, BUD (Fig. 38.), oder AZ, BUD (Fig. 39.) fallen.

Analysis.

Es sey TU die gesuchte Linie, welche den grösseren Kreis in V schneide. Macht man $AY=YB$, $AWD=YXD=R$, und giebt BU, so ist

$$BY : YA = UX : XW$$

$$\text{also } UX = XW$$

$$\text{folglich } TU = VW$$

$$\begin{aligned} \text{Ferner ist } AD : DB &= WD : DU \\ \text{wenn } AD : DB = N : P; N : P &\left\{ \begin{aligned} &= VD - TU : DT - TU \text{ (Fig. 38.)} \\ &= VD - N : DT - N \\ &= TU - DV : TU - DT \text{ (Fig. 39)} \\ &= N - VD : N - DT \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mithin } AD : DB &\left\{ \begin{aligned} &= VD : DT + P - N \text{ (El. V. 12. 19.)} \\ &AD \cdot DB : BD^2 \left\{ \begin{aligned} &= VD \cdot DT : DT(DT + P - N) \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\text{also } BD^2 = DT(DT + P - N)$$

folglich ist das Rechteck $DT(DT + P - N)$ gegeben. Da nun auch $(DT + P - N) - DT = P - N$ gegeben ist, so ist DT (Dat. 85.) der Grösse und (Dat. 28.) der Lage nach gegeben.

Ann. Wenn $AD = DB$, also $N < P$, so wird $BD^2 = DT(DT - (N - P))$, übrigens aber wird verfahren, wie folgt.

Determination.

Es ist (Fig. 38.) $DB < BA$

$$\text{also } \frac{\frac{1}{2}DB}{B\beta} < \frac{\frac{1}{2}BA}{BY}, \text{ wenn } B\beta = \beta D,$$

folglich $\beta T < \beta Z$

$$\text{(El.II.6.III.36.) } \frac{\text{mithin } \beta T^2}{DT \cdot TU + \beta D^2} < \frac{\beta Z^2}{\beta D^2 + DZ^2}$$

somit $DT \cdot TU < DZ^2$

also $DT : DZ < DZ : TU$ (Hauber l. c. §. 53.)

Es ist aber $DT > DZ$

folglich $DZ > TU$ (Hauber l. c. §. 11.)

mithin muss $N < DZ$ seyn.

Es ist (Fig. 39.) $XY < YD$, $UT < TV$, $TV < AB$

also $TX > DZ$ also $TU < AB$

folglich $TU < DZ$

mithin muss $N < DZ$, $N > AB$ seyn.

Construction.

Man mache $BDE = BDP = R$, $ED = DR = DP$, $DN = N$, $NL \# AE$, $LM \# DN$, $NM \# DE$, $ON = NM$, $DOQ = R$, $PQ \# DB$, beschreibe über QE als Durchmesser einen Kreis, welcher die verlängerte AD in R schneide, und aus D als Mittelpunkt mit einem Radius $= DR$ einen zweiten. Der Durchschnitt desselben mit dem grösseren Kreise wird die gesuchte Linie bestimmen.

Beweis.

Es ist (Fig. 38.) $DR \cdot RO = BD^2$ *)also $RO:DB = BD:DR$ (El. VI. 17.)Es ist aber $RO < DR$ folglich auch $BD < DR$ (El. II. 4.)Es ist (Fig. 39.) $N = AB$ (Det.)also $ND(BD - DA) = \frac{(BD + DA)(BD - DA)}{BD^2 - DA^2}$

folglich $DA^2 + \left\{ \begin{array}{l} ND \cdot DB \\ AD \cdot DL \end{array} \right\} - ND \cdot DA = \left\{ \begin{array}{l} BD^2 \\ R\alpha^2 - \alpha D^2 \end{array} \right.$ (El. II. 6.), wenn $D\alpha = \alpha O$,

mithin $AD^2 + 2\alpha D \cdot DA + D\alpha^2 = R\alpha^2$ somit $AD + D\alpha = R\alpha$ und $AD < \left\{ \begin{array}{l} R\alpha - \alpha D \\ DR \end{array} \right.$

Ferner ist $DZ \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \\ = \\ < \end{array} \right\} N$, wenn das obere Zeichenpaar sich auf Fig. 38. bezieht, und das untere auf Fig. 39.

also $DZ^2 \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \\ = \\ < \end{array} \right\} ND \cdot DZ$
 (El. VI. 17) $AD \cdot DB \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \\ = \\ < \end{array} \right\}$

*) Apollonius de Sect. det. pag. 5.

$$\text{folglich } BD : DZ \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \\ = \\ < \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} ND : DA \text{ (El. VI. 16. u. H. §. 52.)} \\ ND(BD - DA) : DA(BD - DA) \\ AD(DL - N) \text{ (El. VI. 16.)} \\ \{ DL - N \} : BD - DA \\ 2D\alpha \end{array} \right.$$

$$\text{mithin } BD^2 - BD \cdot DA \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \\ = \\ < \end{array} \right\} 2\alpha D \cdot DZ \text{ (El. VI. 16. Hauber §. 52.)}$$

$$\text{somit } \left\{ \begin{array}{l} BD^2 \\ R\alpha^2 - \alpha D^2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \\ = \\ < \end{array} \right\} BD \cdot DA + 2\alpha D \cdot DZ$$

$$R\alpha^2 \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \\ = \\ < \end{array} \right\} DZ^2 + 2\alpha D \cdot DZ + D\alpha^2$$

$$\text{folglich } R\alpha \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \\ = \\ < \end{array} \right\} ZD + D\alpha$$

$$\text{mithin } \left\{ \begin{array}{l} R\alpha - \alpha D \\ DR \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \\ = \\ < \end{array} \right\} DZ$$

Der aus D als Mittelpunkt mit einem Radius = DR beschriebene Kreis erreicht also den Bogen AZ in A, oder Z, oder in einem Punkte T zwischen A, Z, BZ in Z

schen A, Z, B, Z Fig. 39. Im ersten Fall (Fig. 39.)

ist AB, im ersten (Fig. 38.) und zweiten (Fig. 39.) ist DZ die gesuchte Linie, wie leicht erhellet. Im zweiten (Fig. 38.) und dritten (Fig. 39.) ist

$$BD^2 = DR \cdot RO$$

$$= DR(RD + ON - ND)$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} AD, DB : BD^2 \\ AD : DB \\ ND : \left\{ \begin{array}{l} DL \\ ON \end{array} \right\} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} VD \cdot DT : DR(RD + ON - ND) \\ VD : DR + ON - ND \end{array} \right.$$

$$\text{folglich (Fig. 38.) } \left. \begin{array}{l} AD : DB \\ (El. VI. 2.) \quad WD : DU \\ VD - TU : DT - TU \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} VD - DN : RD - DN \text{ (El. V. 19.)} \\ \text{wenn } VWD = R, \text{ und } BU \\ \text{gezogen wird,} \\ \text{weil } WX : XU = AY : YB \end{array} \right.$$

$$\text{also } WX = XU$$

$$\text{folglich } VW = TU$$

$$\text{also } TD - DV : DT - TU = RD - DV : RD - DN \text{ (El. V. 18.)}$$

$$\text{folglich } DT - TU = RD - DN$$

$$\text{mithin } TU = \left\{ \begin{array}{l} DN \\ N \end{array} \right.$$

$$\text{Es ist (Fig. 39.) } \left. \begin{array}{l} AD : DB \\ WD : DU \\ TU - DV : UT - TD \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} ND - DV : ND - DR \text{ (El. V. 19.)} \\ \text{wenn } AWD = R, \text{ und } BU \\ \text{gezogen wird,} \\ \text{weil } WX : XU = AY : YB \end{array} \right.$$

$$\text{also } WX = XU$$

$$\text{folglich } VW = TU$$

$$\text{also } VD - DT : UT - TD = VD - DR : ND - DR$$

$$\text{folglich } UT - TD = ND - DR$$

$$\text{mithin } \left. \begin{array}{l} ND \\ N \end{array} \right\} = TU$$

B) Auswendig (Fig. 40—42.) Die gerade Linie soll gezogen werden

a) von dem Berührungspunkte aus. (Fig. 40.)

Anal. Det. Constr. und Bew. buchstäblich, wie zu A. a., wenn man daselbst statt $\begin{cases} EA-AD \\ BA-AC \end{cases}$ setzt

$$\begin{cases} EA+AD \\ BA+AC \end{cases}$$

b) von dem anderen Endpunkte D eines Durchmessers BD aus (Fig. 41. 42.). Die gesuchte Linie soll, wenn DZ den über AB beschriebenen Kreis in Z berührt, den anderen in S schneidet, zwischen den Bogen SB, BZ (Fig. 41.), oder SB, AZ (Fig. 42.) liegen.

Analysis.

Es sey TU die gesuchte Linie, welche den über AB liegenden Kreis in V schneide. Macht man $AY=YB$, $AWD=YXD=R$, und zieht BU, so ist

$$BY : YA = UX : XW$$

$$\text{also } UX = XW$$

$$\text{folglich } TU = WV$$

$$\text{Ferner ist } AD:DB \} = WD:DU$$

$$\text{wenn } AD:DB = N:P; \quad N:P \} = VD+TU:DT-TU \\ = VD+N:DT-N$$

$$\text{also } AD:DB \} = \begin{cases} VD:DT-N-P \\ AD.DB:BD^2 \end{cases} \quad \begin{cases} VD:DT-N-P \\ VD.DT:DT(DT-N-P) \end{cases}$$

$$\text{folglich } BD^2 = DT(DT-N-P)$$

mithin ist das Rechteck $DT(DT-N-P)$ der Grösse nach gegeben. Da auch $DT-(DT-N-P)=N+P$

gegeben ist, so ist DT (Dat. 85.) der Gröfse und (Dat. 28.) der Lage nach gegeben.

Determination.

Es ist (Fig. 41.) $ZD > DT, UD > DS$

$$\text{also } \frac{ZD-DS}{ZS} > \frac{TD-DU}{TU}$$

folglich muß $N \overset{=}{<} ZS$ seyn

Es ist (Fig. 42.) $ZS:SD = YB:BD, BY:YD = UX:XD$
 $= XU:UD$

Es ist aber $SD < DU, YD > DX$

also $ZS < UX, BY > UX$

folglich $ZS < TU, Da AY > TX$

$$\text{so ist } \frac{AY+YB}{AB} > \frac{TX+XU}{TU}$$

mithin muß $N \overset{=}{>} ZS, N \overset{=}{<} AB$ seyn.

Construction.

Man mache $BDE = BDP = R, ED = DB = DP, DN = N, NL \# AE, IM \# DN, NM \# DE, ON = NM, DOQ = R, PQ \# DB$, beschreibe über QE als Durchmesser einen Kreis, welcher die verlängerte DO in R schneide, und aus D als Mittelpunkt mit einem Radius = DR einen zweiten. Der Punkt, in welchem derselbe mit dem über AB beschriebenen Kreise zusammentrifft, wird die gesuchte Linie bestimmen.

Beweis.

Es ist (Fig. 41.) $DR \cdot RO = OQ \cdot DE$
 $= BD^2$

also $RD:DB = BD:RO$

Da aber $DR > RO$

so ist $RD > DB$

Es ist (Fig. 42.) $N \begin{cases} = \\ < \end{cases} \begin{cases} AB \\ AD - DB \end{cases}$

also $ND(AD + DB) \begin{cases} = \\ < \end{cases} AD^2 - DB^2$

folglich $\begin{cases} DB^2 \\ DR \cdot RO \\ R\alpha^2 - \alpha D^2 \end{cases} \begin{cases} = \\ < \end{cases} AD^2 \begin{cases} ND \cdot DA - \begin{cases} ND \cdot DB \\ AD \cdot DL \text{ (El. VI. 16)} \end{cases} \\ - 2AD \cdot D\alpha, \text{ wenn } D\alpha = \alpha O, \end{cases}$

mithin $R\alpha^2 \begin{cases} = \\ < \end{cases} AD^2 - 2AD \cdot D\alpha + D\alpha^2$

somit $\begin{cases} R\alpha + \alpha D \\ DR \end{cases} \begin{cases} = \\ < \end{cases} DA$

Ferner ist $SZ \begin{cases} = \\ > \\ = \\ < \end{cases} N$, wenn DZ den Kreis über $\begin{cases} AB \text{ in } Z \text{ berührt} \\ DB \text{ in } S \text{ schneidet} \end{cases}$, und das $\begin{cases} obere \\ untere \end{cases}$ Zeichenpaar sich auf Fig. $\begin{cases} 41. \\ 42. \end{cases}$ bezieht;

also $\begin{cases} SZ : ZD \\ BY : YD \\ 2BY : 2YD \end{cases} \begin{cases} = \\ > \\ = \\ < \end{cases} ND : DZ$ wenn $BY = YA$,
 $AD - DB : AD + DB$

Es ist auch $AD : \begin{cases} DE \\ DB \end{cases} = ND : \begin{cases} DL \\ NO \end{cases}$

$$\text{also } AD+DB:AD=\left\{\begin{matrix} DN+NO \\ 2D\alpha \end{matrix}\right\}:DN$$

$$\text{folglich } AD-DB:AD\left\{\begin{matrix} = \\ > \\ = \\ < \end{matrix}\right\}2D\alpha:DZ \text{ (El. V. 21. Hauber §. 32.)}$$

$$\text{mithin } AD:DB\left\{\begin{matrix} = \\ > \\ = \\ < \end{matrix}\right\}DZ:DZ-2D\alpha \text{ (El. V. 17. Hauber §. 28.)}$$

$$\text{somit } AD:DZ\left\{\begin{matrix} = \\ > \\ = \\ < \end{matrix}\right\}BD:DZ-2D\alpha \text{ (El. V. 16. Hauber §. 43.)}$$

$$\text{also } DZ^2-2\alpha D.DZ\left\{\begin{matrix} = \\ > \\ = \\ < \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} BD^2 \\ R\alpha^2-\alpha D^2 \end{matrix}\right\} \text{ (El. VI. 17. Hauber §. 53.)}$$

$$\text{folglich } DZ^2-2\alpha D.DZ+D\alpha^2\left\{\begin{matrix} = \\ > \\ = \\ < \end{matrix}\right\}R\alpha^2$$

$$\text{mithin } ZD-D\alpha\left\{\begin{matrix} = \\ > \\ = \\ < \end{matrix}\right\}R\alpha$$

$$\text{somit } DZ\left\{\begin{matrix} = \\ > \\ = \\ < \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} R\alpha+\alpha D \\ DR \end{matrix}\right\}$$

Der aus D als Mittelpunkt mit einem Radius = DR beschriebene Kreis erreicht also den Bogen $\left\{\begin{matrix} BZ \text{ in } Z \\ AZ \text{ in } A, \text{ oder } Z \end{matrix}\right\}$, oder einem Punkte T zwischen $\left\{\begin{matrix} B, Z \\ A, Z \end{matrix}\right\}$ Fig. $\left\{\begin{matrix} 41. \\ 42. \end{matrix}\right\}$. Im $\left\{\begin{matrix} \text{ersten Fall (Fig. 41.)} \\ \text{zweiten Fall (Fig. 42.)} \end{matrix}\right\}$ ist ZS,

im ersten Fall (Fig. 42.) ist AB die gesuchte Linie, wie von selbst erhellet. Im $\left\{ \begin{array}{l} \text{zweiten Fall (Fig. 41.)} \\ \text{dritten Fall (Fig. 42.)} \end{array} \right\}$

$$\text{ist } BD^2 = DR \cdot RO \\ = DR(RD - DN - NO)$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} AD:DB:BD^2 \\ AD:DB \\ ND:DL \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} VD:DT:DR(RD-DN-NO) \\ VD:RD-DN-NO \end{array} \right.$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} AD:DB \\ WD:DU \\ VD+TU:DT-TU \end{array} \right\} = \begin{array}{l} VD+DN:RD-DN \text{ (El. V 12)} \\ \text{wenn } AWD=R, \\ \text{weil } WX:XU=AY:YB, \\ \text{wenn } DXY=R \end{array}$$

$$\text{also } \underline{WX=XU}$$

$$\text{folglich } \underline{VW=TU}$$

$$\text{also } \underline{VD+DT:DT-TU=VD+DR:RD-DN}$$

$$\text{folglich } \underline{DT-TU=RD-DN}$$

$$\text{mithin } TU = \left\{ \begin{array}{l} ND \\ N \end{array} \right.$$

Fall 2. (Fig. 43–75.)

Die Kreise berühren einander nicht.

A) Der eine liegt innerhalb des anderen. (Fig. 43–53.)

a) Die gesuchte Linie soll gezogen werden von einem Endpunkte des gröfseren Durchmessers (Fig. 43=47.).

α) von demjenigen D, welcher von dem kleineren Kreise am weitesten entfernt ist (Fig. 43. 44.). Sie soll, wenn die gerade Linie DZ den inneren Kreis in Z berührt, den

äußeren in S schneidet, liegen zwischen den Bogen CS, BZ in Fig. 43., oder Fig. 44.

Analysis.

Es sey TU die gesuchte Linie, welche den kleineren Kreis in V schneide. Macht man $AY = YB$, $VW = TU$, $DWF = YXD = R$, und zieht CU, so ist

$$\underline{WX : XU = FY : YC \text{ (El. VI. 2.)}}$$

$$\text{also } \underline{FY = YC}$$

$$\text{folglich } AF = BC$$

mithin ist AF der Lage und Größe nach, somit der Punkt F (Dat. 30.) und die gerade Linie DF (Dat. 29.) gegeben.

$$\begin{aligned} \text{Ferner ist } FD:DC &= WD:DU \text{ (El. VI. 2.)} \\ \text{wenn } FD:DC = N:P; \quad N:P &= VD - TU:DT + TU \\ &= VD - N:DT + N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{folglich } FD:DC &= \begin{cases} VD:DT + N + P \text{ (El. V. 12.)} \\ VD.DT:DT(DT + N + P) \end{cases} \\ \text{wenn } FD.DC = AD:H; \quad AD:H &= \begin{cases} AD:DB:BD.H \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{also } BD.H = DT(DT + N + P) \text{ (El. III. 36.)}$$

Folglich ist wegen der gegebenen BD (p. hyp.) und H (Dat. 2.) das Rechteck $DT(DT + N + P)$ der Größe nach gegeben. Da auch $(DT + N + P) - DT = N + P$ gegeben ist, so ist DT (Dat. 85.) der Größe und (Dat. 28.) der Lage nach gegeben.

Determination.

Es ist (Fig. 43) $DA > BC$ (p. hyp.)

$$\text{also } \underline{\begin{matrix} DA + AY \\ DY \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} > \\ \end{matrix} \right\} \begin{matrix} CB + BY \\ CY \end{matrix}}$$

folglich $CY < \begin{cases} CD \\ C\beta \end{cases}$

mithin $UY < YS$ (El. III. 7.)

somit $UY^2 < YS^2$
(El. II. 6. III. 36.) $TU \cdot UV + YZ^2 < \begin{cases} YS^2 \\ SZ^2 + ZY^2 \end{cases}$

also $TU \cdot UV < SZ^2$

folglich $UV:SZ < SZ:TU$ (Hauber §. 53.)

Nun ist $UD > DS, VD < DZ$

mithin $UD - DV > \begin{cases} SD - DZ \\ UV \end{cases} \begin{cases} SD - DZ \\ SZ \end{cases}$

somit $SZ > TU$ (Hauber §. 11.)

Ferner ist $UY > YC$ (El. III. 7.)

also $UY - YK > \begin{cases} YC - CB \\ UK \end{cases} \begin{cases} YC - CB \\ BC \end{cases}$ wenn YK ein Radius ist,

folglich auch $TU > BC$ (El. III. 8.)

mithin muss $N \leq SZ, N \geq BC$ seyn.

Es ist (Fig. 44.) $UD > DS, TD < DZ$

also $UD - DT > \begin{cases} SD - DZ \\ UT \end{cases} \begin{cases} SD - DZ \\ SZ \end{cases}$

Ferner ist $CD > DU, BD < DT$

also $CD - DB < \begin{cases} UD - DT \\ BC \end{cases} \begin{cases} UD - DT \\ TU \end{cases}$

folglich muss $N \geq SZ, N \leq BC$ seyn.

Construction.

Man mache $ADE = ADP = R, ED = DC, PD = DB,$
 $AF = BC, DN = N, NL \# AG \# FE, LM \# DN, NM \# DL,$

ON=NM, DOQ=R, PQ#DO, beschreibe über GQ als Durchmesser einen Kreis, welcher die verlängerte RD in R schneide, und aus D als Mittelpunkt mit einem Radius = DR einen zweiten. Der Punkt, in welchem derselbe den Bogen BZ erreicht, wird die gesuchte Linie bestimmen.

Beweis.

Es ist $N \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \\ = \\ < \end{array} \right\} BC \text{ (Det.)}$, wenn das $\left\{ \begin{array}{l} \text{untere} \\ \text{obere} \end{array} \right\}$ Zeichenpaar sich auf Fig. 43. bezieh. 44. bezieht.

$$\begin{array}{l} \text{also } ND(AD+DB) \\ ND(AD-BC) + \left\{ \begin{array}{l} ND.DC \\ FD.DL \end{array} \right\} \\ (ND+DL)DF \end{array} \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \\ = \\ < \end{array} \right\} \begin{array}{l} BC(AD+DB) \\ AD.BC + DB.BC \\ \left\{ \begin{array}{l} AD.DC \\ FD.DG \end{array} \right\} - (AD-BC)DB \\ (GD-DB)DF \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ (El.VI.16.) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{folglich } ND+DL \\ DO \\ 2Da \end{array} \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \\ = \\ < \end{array} \right\} GD-DB$$

wenn $Da = aO$,

$$\text{mithin } 2BD.Da \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \\ = \\ < \end{array} \right\} GD.DB - BD^2$$

$$\text{somit } BD^2 + 2BD.Da + Da^2 \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \\ = \\ < \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} GD.DB \\ DR.RO \end{array} \right\} + Da^2$$

Ra^2

$$\text{also } BD+Da \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \\ = \\ < \end{array} \right\} Ra$$

folglich $BD \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \begin{cases} Ra - aD \\ DR \end{cases}$

Ferner ist $SZ \begin{cases} \overset{=}{>} \\ \overset{=}{<} \end{cases} N$ (Det.), wenn DZ
den $\begin{cases} \text{kleineren} \\ \text{gröfseren} \end{cases}$ Kreis
in $\begin{cases} Z \text{ berührt} \\ S \text{ scheidet} \end{cases}$

also ist $SZ:ZD$ $\left\{ \begin{array}{l} > \\ = \\ < \end{array} \right\} ND:DZ$
 $CY:YD$
 ${}_2CY:{}_2YD$
 $CD-DF:DC+DF$
 (El. V. 17.18.) $YD-DA : GD+DA$ wenn $CY=YA$

Es ist auch $AD : DG = ND :$ $\left\{ \begin{array}{l} DL \\ MN \\ NO \end{array} \right.$

folglich $GD+DA : AD = ON+ND : DN$

mithin $GD-DA : AD \left\{ \begin{matrix} = \\ > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} ON+ND \\ 2Da \end{matrix} \right\} : DZ$ (El. V. 21. Hau-
ber §. 32.)

somit $AD : DG \left\{ \begin{smallmatrix} = \\ > \\ = \\ < \end{smallmatrix} \right\} DZ : DZD_2D\alpha$ (El. V. 18. Hauber
§. 19. 5.)

also $AD : DZ \left\{ \begin{array}{l} \overline{=} \\ > \\ \overline{=} \\ < \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} GD : DZ + 2D\alpha \text{ (El. V. 16. Hauber} \\ DR : RO \\ R\alpha^2 - \alpha D^2 \end{array} \right. \quad \S. 43.)$

$$\text{folglich } DZ^2 + 2BD.D\alpha \begin{cases} = \\ > \\ = \\ < \end{cases} \begin{cases} BD.DG & (\text{El. VI. 17}) \\ DR.RO & \text{Hauber §. 53) } \\ Ra^2 - \alpha D^2 \end{cases}$$

$$\text{mithin } DZ^2 + 2BD.D\alpha + \alpha D^2 \begin{cases} = \\ > \\ = \\ < \end{cases} Ra^2$$

$$\text{somit } ZD + DA \begin{cases} = \\ > \\ = \\ < \end{cases} Ra$$

$$\text{und } DZ \begin{cases} = \\ > \\ = \\ < \end{cases} \begin{cases} Ra - \alpha D \\ DR \end{cases}$$

Der aus D als Mittelpunkt mit einem Radius = DR beschriebene Kreis erreicht also den Bogen BZ in B, oder Z, oder in einem Punkte T zwischen B, Z. Im ersten Fall ist BC, im zweiten SZ die gesuchte Linie, wie von selbst erhellet. Im Dritten ist

$$BD.DG = DR.RO$$

$$= DR(RD + DN + NO)$$

$$\text{also } AD.DB:BD.DG = VD.DT:DR(RD + DN + DO),$$

$$\left. \begin{array}{l} AD:DG \\ ND:DL \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{wenn die Linie DT den klei-} \\ \text{neren Kreis in V schneidet,} \end{array}$$

$$= VD:RD + DN + NO$$

$$\text{folglich } ND:DL = VD - DN:RD + DN$$

$$\left. \begin{array}{l} FD:\{DE\} \\ \{DC\} \end{array} \right\}$$

$$WD:DU$$

$$VD - TUD:T + TU$$

wenn DFW = R,

weil WX:XU = FY:YC,

wenn YX # FW,

$$\text{also } WX = XU$$

$$\text{folglich } \overline{WV} = \overline{TU}$$

$$\text{mithin } VD + DT : DT + TU = VD + DR : RD + DN$$

$$\text{somit } DT + TU = RD + DN$$

$$\text{also } TU = \begin{cases} DN \\ N \end{cases}$$

β) von demjenigen, D, welcher dem kleineren Kreise am nächsten liegt (Fig. 45—47.). Sie soll, wenn die gerade Linie DZ den inneren Kreis in Z berührt, den äusseren in S schneidet, liegen zwischen den Bogen CS, BZ (Fig. 45. 47.), oder CS, AZ (Fig. 46.).

Analysis.

Es sey TU die gesuchte Linie, welche den kleineren Kreis in V schneide. Macht man $AY = YB$, $VW = TU$, $DWF = YXD = R$, und zieht CU, so ist

$$\overline{WX : XU} = \overline{FY : YC}$$

$$\text{also } FY = YC$$

$$\text{folglich } \overline{AF} = \overline{BC}$$

mithin ist AF der Lage und Gröfse nach, somit der Punkt F, und die gerade Linie DF gegeben.

Ferner ist $FD : DC = WD : DU$

$$N : P = \begin{cases} = TU - VD : DT + TU, \text{ wenn} \\ FD : DC = N : P, \text{ wobey} \\ P > N, \text{ weil } CD > DF, \\ = N - VD : DT + N \end{cases}$$

$$FD : DC = N : P, \text{ wobey}$$

$$P > N, \text{ weil } CD > DF,$$

$$= N - VD : DT + N$$

$$\text{also } N : P = \begin{cases} VD : P - N - DT \\ VD : DT : DT (P - N - DT) \end{cases}$$

$$\text{wenn } FD : DC = AD : H, AD : H = \begin{cases} AD : DB : BD : H \end{cases}$$

$$\text{also } BD.H = DT(P - N - DT)$$

$$\text{mithin } 2BD.D\alpha \stackrel{=}{<} BD^2 + BD.DG$$

$$\text{somit } \left. \begin{array}{l} 2D\alpha \\ \alpha D - DN \end{array} \right\} \stackrel{=}{<} BD + DG$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} LD.DF \\ ND.DC \\ ND(AD+DB) \end{array} \right\} - ND.DF \stackrel{=}{<} \left\{ \begin{array}{l} BD.DF + GD.DF \\ DB(BC-AD) + AD.DC \\ (AD+DB)BC \end{array} \right.$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} ND \\ N \end{array} \right\} \stackrel{=}{<} BC$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} RD \\ D\alpha + \alpha R \end{array} \right\} \stackrel{=}{>} DZ$$

$$\text{also } \alpha R \stackrel{=}{>} ZD - D\alpha$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} \alpha R^2 \\ D\alpha^2 - \left\{ \begin{array}{l} DR:DO \\ BD.DG \end{array} \right\} \end{array} \right\} \stackrel{=}{>} DZ^2 - 2ZD.D\alpha + \alpha D^2$$

$$\text{mithin } (2\alpha D - DZ)DZ \stackrel{=}{>} BD.DG$$

$$\text{somit } \left. \begin{array}{l} ZD : DB \\ AD : DZ \end{array} \right\} \stackrel{=}{>} DG : 2\alpha D - DZ \quad (\text{El. VI. 16. Hauber §. 52.})$$

$$\text{also } AD : DG \stackrel{=}{>} DZ : 2\alpha D - DZ \quad (\text{El. V. 16. Hauber §. 43.})$$

$$\text{folglich } AD + DG : AD \stackrel{=}{<} 2\alpha D : DZ \quad (\text{El. V. 18. Hauber §. 21.})$$

$$\text{Es ist aber } AD : DG = ND : DL$$

$$\text{mithin } AD:GD-DA=ND:\left\{ \begin{array}{l} LD-DN \\ 2\alpha D \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} \text{somit } AD+DG:GD-DA \\ (\text{El. VI. 4.}) \quad CD+DF:CD-DF \\ \quad 2CY:2DY \\ \quad CY:YD \\ (\text{El. VI. 2.}) \quad SZ:ZD \end{array} \left\{ \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \right. ND:DZ \quad (\text{El. V. 21.} \\ \text{Hauber §. 32.}) \\ \text{wenn } AY=YB,$$

$$\text{und } SZ \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \left\{ \begin{array}{l} ND \\ N \end{array} \right. \quad (\text{El. V. 9. 10.})$$

Beweis.

$$\text{Es ist } SZ \begin{array}{l} = \\ < \end{array} N \quad (\text{Det.})$$

$$\begin{array}{l} \text{also } SZ:ZD \\ \quad CY:YD \\ \quad 2CY:2DY \\ \quad CD+DF:CD-DF \\ \quad GD+DA:GD-DA \end{array} \left\{ \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \right. ND:DZ$$

$$\text{Da nun } AD:DG=ND:DL$$

$$\text{also } GD-DA:AD=LD-DN:ND$$

$$\text{so ist } GD+DA:AD \begin{array}{l} = \\ < \end{array} 2\alpha D:DZ$$

$$\text{folglich } AD:DG \begin{array}{l} = \\ > \end{array} DZ:2\alpha D-DZ \quad (\text{El. V. 17.} \\ \text{Hauber §. 22.})$$

$$\text{mithin } AD:DZ \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \right. DG:2\alpha D-DZ \\ \quad ZD:DB$$

$$\text{somit } 2\alpha D.DZ-DZ^2 \begin{array}{l} = \\ > \end{array} BD.DG$$

$$\text{also } D\alpha^2 - BD \cdot DG \stackrel{=}{>} DZ^2 - 2\alpha D \cdot DZ + D\alpha^2$$

$$\text{Es ist aber } D\alpha^2 + DZ^2 \stackrel{=}{>} 2\alpha D \cdot DZ \quad (\text{El. II. 9. 5.})$$

$$\text{folglich } D\alpha^2 > BD \cdot DG$$

Der über GQ als Durchmesser beschriebene Kreis erreicht also die Linie DO (S. Apoll. *de Sect. det.* pag. 7.). Es geschehe in R, so ist

$$BD \cdot DG = DR \cdot DO$$

$$\text{mithin } D\alpha^2 - DR \cdot RO \stackrel{=}{>} DZ^2 - 2\alpha D \cdot DZ + D\alpha^2$$

$$\alpha R^2$$

$$\text{somit } \alpha R \stackrel{=}{>} ZD - D\alpha, \text{ oder } \alpha R \stackrel{=}{>} \alpha D - DZ,$$

$$\text{also } R\alpha + \alpha D \stackrel{=}{>} DZ, \quad \text{also } DZ \stackrel{=}{>} \begin{cases} D\alpha - \alpha R \\ DR', \text{ wenn} \\ R\alpha = \alpha R', \end{cases}$$

$$\text{Ferner ist } BC \stackrel{=}{>} N \quad (\text{Det.})$$

$$\text{also } BC(AD + DB) \stackrel{=}{>} \begin{cases} ND(AD + DB) \\ (BD + DG)DF \end{cases} \stackrel{=}{>} \begin{cases} ND(AD + DB) \\ (LD - DN)DF \end{cases}$$

$$\text{folglich } BD + DG \stackrel{=}{>} \begin{cases} LD - DN \\ 2D\alpha \end{cases}$$

$$\text{mithin } BD^2 + BD \cdot DG \stackrel{=}{>} 2BD \cdot D\alpha$$

$$\text{somit } BD^2 - 2BD \cdot D\alpha + D\alpha^2 \stackrel{=}{>} \begin{cases} D\alpha^2 - BD \cdot DG \\ R\alpha^2 \end{cases}$$

$$\text{also } BD - Da \stackrel{=}{>} Ra$$

$$\text{folglich } BD \stackrel{=}{>} \begin{cases} Ra + aD \\ DR \end{cases}$$

Der aus D als Mittelpunkt mit einem Radius $= DR$ beschriebene Kreis erreicht also den Bogen BZ in B, oder Z, oder in einem Punkte T zwischen B, Z. Der aus D als Mittelpunkt mit einem Radius $= DR'$ beschriebene Kreis erreicht den Bogen BZ nicht, wenn nicht R, R' zusammenfallen. Im ersten Fall ist BC, im zweiten SZ die gesuchte Linie, wie leicht erhellet. Im dritten ist

$$\begin{aligned} BD \cdot DG &= DR \cdot RO \\ &= DR(LD - DN - RD) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{also } VD \cdot DT : DR(LD - DN - DR) &= AD \cdot DB : BD \cdot DG \\ VD : LD - DN - DR &= AD : DG \\ &= ND : DL \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{folglich } ND - DV : RD + DN &= ND : DL \\ &= FD : \begin{cases} DE \\ DC \end{cases} \\ &= WD : DU, \text{ wenn DT} \\ &\quad \text{gezogen ist, welche} \\ &\quad \text{den } \begin{cases} \text{grösseren} \\ \text{kleineren} \end{cases} \\ &\quad \text{Kreis in } \begin{cases} U \\ V \end{cases} \\ &\quad \text{schneidet, und} \\ &\quad FVD = R, \\ &= TU - DV : DT + TU \\ &\quad \text{weil } WX : XU = FY : YC \\ &\quad \text{wenn } YXD = R \end{aligned}$$

$$\text{also } WX = XU$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} WX - XV \\ VW \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} UX - XT \\ TU \end{array} \right.$$

$$\text{mithin } VD + DR : RD + DN = VD + DT : DT + TU$$

$$\text{somit } RD + DN = DT + TU$$

$$\text{und } \left. \begin{array}{l} DN \\ N \end{array} \right\} = TU.$$

2) Zu Fig. 46.

Determination.

Damit der aus D als Mittelpunkt mit einem Radius = DR beschriebene Kreis den Bogen BZ erreiche,

muss seyn

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} DR \\ D\alpha - \alpha R \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \\ > \end{array} DB \quad \text{wenn } D\alpha = \alpha O,$$

$$\text{also } \alpha D - DB \begin{array}{l} = \\ > \end{array} R\alpha$$

$$\text{folglich } D\alpha^2 - 2\alpha D \cdot DB + BD^2 \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \left\{ \begin{array}{l} R\alpha^2 \\ D\alpha^2 - \left\{ \begin{array}{l} DR \cdot RO \\ BD \cdot DG \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

$$\text{mithin } BD^2 + BD \cdot DG \begin{array}{l} = \\ > \end{array} 2\alpha D \cdot DB$$

$$\text{somit } BD + DG \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha D \\ LD - DN \end{array} \right.$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} BD \cdot DF + \left\{ \begin{array}{l} GD \cdot DF \\ AD \cdot DC \end{array} \right\} \\ CB(BD + DA) \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \left\{ \begin{array}{l} LD \cdot DF \\ ND \cdot DC \end{array} \right\} - ND \cdot DF$$

$$\left\{ \begin{array}{l} LD \cdot DF \\ ND \cdot DC \end{array} \right\} - ND \cdot DF = ND(RD + DA)$$

$$\text{folglich } BC \overset{=}{>} \begin{cases} ND \\ N \end{cases}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} DR \\ D\alpha - \alpha R \end{array} \right\} \overset{=}{<} DZ$$

$$\text{also } \alpha D - DZ \overset{=}{<} \alpha R$$

$$\text{folglich } D\alpha^2 - 2\alpha D \cdot DZ + DZ^2 \overset{=}{<} \begin{cases} \alpha R^2 \\ D\alpha^2 - \begin{cases} DR \cdot RO \\ BD \cdot DG \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{mithin } BD \cdot DG \overset{=}{<} (2\alpha D - DZ) DZ$$

$$\text{somit } \left. \begin{array}{l} ZD : DB \\ AD : DZ \end{array} \right\} \overset{=}{>} DG : 2\alpha D - DZ$$

$$\text{also } AD : DG \overset{=}{>} DZ : 2\alpha D - DZ$$

$$\text{folglich } AD + DG : AD \overset{=}{<} 2\alpha D : DZ$$

$$\text{Da nun } AD : DG = ND : DL$$

$$\text{so ist } AD : GD - DA = ND : LD - DN$$

$$\begin{array}{l} \text{mithin } AD + DG : GD - DA \\ \text{(El. VI. 2.) } CD + DF : CD - DF \\ \quad \begin{array}{l} 2CY : 2DY \\ CY : YD \\ SZ : ZD \end{array} \end{array} \left\} \overset{=}{<} ND : DZ \quad \text{wenn } AY = YB,$$

$$\text{somit } SZ \overset{=}{>} \begin{cases} DN \\ N \end{cases}$$

Beweis.

$$\text{Es ist } SZ \overset{=}{<} N \text{ (Det.)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{also } SZ : ZD \\ CY : YD \\ 2CY : 2YD \\ CD + DF : CD - DF \\ GD + DA : GD - DA \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \\ < \\ = \\ = \\ = \end{array} ND : DZ$$

Da nun $AD : DG = ND : DL$

folglich $GD - DA : AD = \alpha D - DN : ND$

so ist $GD + DA : AD = 2\alpha D : DZ$

mithin $AD : DG = DZ : 2\alpha D - DZ$

somit $\left. \begin{array}{l} AD : DZ \\ ZD : DB \end{array} \right\} = DG : 2\alpha D - DZ$

also $2\alpha D \cdot DZ - DZ^2 = BD \cdot DG$

folglich $D\alpha^2 - BD \cdot DG = D\alpha^2 - 2\alpha D \cdot DZ + DZ^2$

Es ist aber $DZ^2 + D\alpha^2 = 2\alpha D \cdot DZ$

mithin auch $D\alpha^2 = BD \cdot DG$

Der über GQ als Durchmesser beschriebene Kreis erreicht also die Linie DO. Es geschehe in R, so ist $BD \cdot DG = DR \cdot RO$

also $D\alpha^2 - \left\{ \begin{array}{l} DR \cdot RO \\ \alpha R^2 \end{array} \right\} = D\alpha^2 - 2\alpha D \cdot DZ + DZ^2$

folglich $\alpha R = \alpha D - DZ$, oder $\alpha R = ZD - D\alpha$

$$\text{mithin } DZ \stackrel{=}{>} \left\{ \begin{array}{c} D\alpha - \alpha R \\ DR \end{array} \right\} \stackrel{=}{>} \left\{ \begin{array}{c} R\alpha + \alpha D \\ DR' \end{array} \right\} \stackrel{=}{>} DZ, \text{ wenn } R\alpha = \alpha R'$$

Ferner ist $BC \stackrel{=}{>} N$ (Det.)

$$\text{also } \frac{BC(AD+DB)}{(BD+DG)DF} \stackrel{=}{>} \frac{ND(AD+DB)}{(LD-DN)DF}$$

$$\text{folglich } BD+DG \stackrel{=}{>} \left\{ \begin{array}{c} LD-DN \\ 2D\alpha \end{array} \right\}$$

$$\text{mithin } BD^2 + BD \cdot DG \stackrel{=}{>} 2BD \cdot D\alpha$$

$$\text{somit } D\alpha^2 - 2BD \cdot D\alpha + DB^2 \stackrel{=}{>} \left\{ \begin{array}{c} D\alpha^2 - \left\{ \begin{array}{c} BD \cdot DG \\ DR \cdot RO \end{array} \right\} \\ \alpha R^2 \end{array} \right\}$$

$$\text{also } \alpha D - DB \stackrel{=}{>} \alpha R$$

$$\text{folglich } \left\{ \begin{array}{c} D\alpha - \alpha R \\ DR \end{array} \right\} \stackrel{=}{>} DB$$

Der aus D als Mittelpunkt mit einem Radius $= DR$ beschriebene Kreis erreicht also den Bogen BZ in B, oder Z, oder in einem Punkte T zwischen B, Z. Der aus D als Mittelpunkt mit einem Radius $= DR'$ beschriebene Kreis erreicht den Bogen BZ nicht, wenn nicht R, R' zusammen fallen. Im ersten Fall u. s. w. buchstäblich, wie zu Fig. 45.

2) Es sey $ZS > BC$ (Fig. 47.). Ann. Da $CD > DS$, $ZD > DB$

$$\text{so ist } \left\{ \begin{array}{c} CD - DB \\ BC \end{array} \right\} > \left\{ \begin{array}{c} SD - DZ \\ SZ \end{array} \right\}$$

also kann dieser Fall bey Fig. 48. nicht statt finden.

Determination.

Damit der aus D als Mittelpunkt mit einem Radius = DR beschriebene Kreis den Bogen BZ erreiche,

mufs seyn

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} DR \\ D\alpha - \alpha R \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \\ < \end{array} DB$$

$$\text{also } \alpha D - DB \begin{array}{l} = \\ < \end{array} R\alpha$$

$$\text{folglich } D\alpha^2 - 2\alpha D \cdot DB + BD^2 \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \left\{ \begin{array}{l} R\alpha^2 \\ D\alpha^2 - \left\{ \begin{array}{l} DR \cdot RO \\ BD \cdot DG \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

$$\text{mithin } BD^2 + BD \cdot DG \begin{array}{l} = \\ < \end{array} 2\alpha D \cdot DB$$

$$\text{somit } BD + DG \begin{array}{l} = \\ < \end{array} LD - DN$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} BD \cdot DF + \left\{ \begin{array}{l} GD \cdot DF \\ AD \cdot DC \end{array} \right\} \\ DB \cdot BC + AD \cdot BC \\ (AD + DB) \cdot BC \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \left\{ \begin{array}{l} LD \cdot DF \\ ND \cdot DC \end{array} \right\} - ND \cdot DF$$

$$\text{folglich } BC \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \left\{ \begin{array}{l} ND \\ N \end{array} \right.$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} DR \\ D\alpha - \alpha R \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \\ > \end{array} DZ$$

$$\text{also } \alpha D - DZ \begin{array}{l} = \\ > \end{array} R\alpha$$

$$\text{folglich } D\alpha^2 - 2\alpha D \cdot DZ + DZ^2 \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \left\{ \begin{array}{l} R\alpha^2 \\ D\alpha^2 - \left\{ \begin{array}{l} DR \cdot RO \\ BD \cdot DG \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

$$\text{mithin } BD \cdot DG \stackrel{=}{>} (2\alpha D - DZ) DZ$$

$$\text{somit } \left. \begin{array}{l} ZD:DB \\ AD:DZ \end{array} \right\} \stackrel{=}{<} DG:2\alpha D - DZ$$

$$\text{also } AD:DG \stackrel{=}{<} DZ:2\alpha D - DZ$$

$$\text{folglich } AD + DG:AD \stackrel{=}{>} 2\alpha D:DZ$$

$$\text{Da nun } AD:DH = ND:DL$$

$$\text{mithin } AD:GD - DA = ND:LD - DN$$

$$\text{so ist } \left. \begin{array}{l} GD + DA:GD - DA \\ CD + DF:CD - DF \\ 2CY:2DY \\ CY:YD \\ SZ:ZD \end{array} \right\} \stackrel{=}{>} ND:DZ$$

wenn $AY = YB$,

$$\text{mithin } SZ \stackrel{=}{>} \left\{ \begin{array}{l} ND \\ N \end{array} \right.$$

Beweis.

$$\text{Es ist } BC \stackrel{=}{<} N \text{ (Det.)}$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} BC(AD + DB) \\ (BD + DG)DF \end{array} \right\} \stackrel{=}{<} \left\{ \begin{array}{l} ND(AD + DB) \\ (LD - DN)DF \end{array} \right.$$

$$\text{folglich } BD + DG \stackrel{=}{<} LD - DN$$

$$\text{mithin } BD^2 + BD \cdot DG \stackrel{=}{<} 2\alpha D \cdot DB$$

$$\text{somit } D\alpha^2 - 2\alpha D.DB + BD^2 \stackrel{=}{<} D\alpha^2 - BD.DG$$

$$\text{Da aber } D\alpha^2 + DB^2 \stackrel{=}{>} 2\alpha D.DB$$

$$\text{so ist auch } D\alpha^2 \stackrel{=}{>} BD.DG$$

Der über GQ beschriebene Kreis erreicht also die gerade Linie DO. Es geschehe in R, so ist

$$BD.DG = DR.RO$$

$$\text{also } D\alpha^2 - 2\alpha D.DB + BD^2 \stackrel{=}{<} \begin{cases} D\alpha^2 - DR.RO \\ R\alpha^2 \end{cases}$$

$$\text{folglich } \alpha D - DB \stackrel{=}{<} R\alpha, \text{ oder } BD - D\alpha \stackrel{=}{<} R\alpha$$

$$\text{mithin } \left. \begin{matrix} D\alpha - \alpha R \\ DR \end{matrix} \right\} \stackrel{=}{<} DB, \quad \text{also } BD \stackrel{=}{<} \begin{cases} R\alpha + \alpha D \\ DR' \end{cases}$$

wenn $R'\alpha = \alpha R$,

$$\text{Ferner ist } SZ \stackrel{=}{>} N \text{ (Det.)}$$

$$\text{also } \left. \begin{matrix} SZ:ZD \\ GD+DA : GD-DA \end{matrix} \right\} \stackrel{=}{>} ND:DZ$$

$$\text{Nun ist } AD:DG = ND:DL$$

$$\text{folglich } GD-DA : AD = LD-DN : ND$$

$$\text{mithin } GD+DA : AD \stackrel{=}{>} 2\alpha D : DZ$$

$$\text{somit } AD : DG \stackrel{=}{<} DZ:2\alpha D - DZ$$

$$\text{also } \left. \begin{matrix} AD : DZ \\ ZD : DB \end{matrix} \right\} \stackrel{=}{<} DG:2\alpha D - DZ$$

$$\text{folglich } BD.DG \stackrel{=}{>} 2\alpha D.DZ - DZ^2$$

$$\text{mithin } D\alpha^2 - 2\alpha D.DZ + DZ^2 \stackrel{=}{>} \left\{ \begin{array}{l} D\alpha^2 - \{BD.DG \\ DR.RO \} \\ R\alpha^2 \end{array} \right.$$

$$\text{somit } \alpha D - DZ \stackrel{=}{>} R\alpha$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} D\alpha - \alpha R \\ DR \end{array} \right\} \stackrel{=}{>} DZ$$

Der aus D als Mittelpunkt mit einem Radius $= \left\{ \begin{array}{l} DR \\ DR' \end{array} \right\}$ beschriebene Kreis erreicht also den Bogen BZ in B, oder Z, oder in einem Punkt T zwischen nicht, wenn nicht R, R' zusammen fallen B, Z. Im ersten Fall ist BC, im zweiten SZ die gesuchte Linie, wie von selbst erhellet. Im dritten ist $BD.DG = DR.RO$, u. s. w. buchstäblich, wie zu Fig. 45.

2) Es sey $ZS = BC$ Fig. 47. Anm. wie zu 1.

Determination.

Damit der aus D als Mittelpunkt mit einem Radius $= DR$ beschriebene Kreis den Bogen BZ erreiche, muß seyn $RD \stackrel{=}{<} DB, RD \stackrel{=}{>} DZ$

$$\text{also } BC \stackrel{=}{<} N, SZ \stackrel{=}{>} N, \text{ welches wie bey}$$

1. bewiesen wird,

$$\text{oder } BC \stackrel{=}{>} N, SZ \stackrel{=}{<} N, \text{ welches wie}$$

bey 1. bewiesen wird

Da dieses nur möglich ist, wenn $BC=N=SZ$, so sind BC, SZ Linien von der gegebenen Eigenschaft.

b) Die gesuchte Linie soll gezogen werden von einem Endpunkte des kleinern Durchmessers (Fig. 48–53.);

a) von demjenigen, D , welcher von dem grösseren Kreise am weitesten entfernt ist (Fig. 48. 49.). Sie soll, wenn DZ auf AD perpendicular steht, und den grösseren Kreis in Z schneidet, liegen zwischen den Bogen BZ , CUD in Fig. 48, oder in Fig. 49.

Analysis.

Es sey TU die gesuchte Linie, welche den grösseren Kreis in V schneide. Macht man $AY=YB$, $VW=TU$, $DWF=YXD=R$, und zieht CU , so ist

$$WX : XU = FY : YC$$

$$\text{also } FY = YC$$

$$\text{folglich } AF = BC$$

mithin ist AF der Lage und Grösse nach, somit der Punkt F , und die gerade Linie DF gegeben.

$$\begin{aligned} \text{Ferner ist } FD:DC \} &= WD:DU \\ \text{wenn } FD:DC=N:P; N:P \} &= VD-TU:DT-TU \text{ (Fig. 38)} \\ &= VD-N:DT-N \\ &= TU-VD:TU-DT \text{ (Fig. 49)} \\ &= N-VD:N-DT \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{also } N : P \} &= \{ VD:DP+P-N \text{ (fig. 48. 49.)} \\ \text{wenn } FD:DC=AD:H; AD:H \} & \{ VD.DT:DT(DT+P-N) \\ & AD.DB:BD.H \} \end{aligned}$$

$$\text{folglich } BD.H = DT(DT+P-N)$$

mithin ist wegen der gegebenen BD, H das Rechteck $DT(DT+P-N)$ der Gröſſe nach gegeben. Da nun auch $(DT+P-N)-DT=P-N$ gegeben ist, so ist DT (Dat. 85.) der Gröſſe und (Dat. 28.) der Lage nach gegeben.

Anm. Wenn $P \stackrel{=}{<} N$, so ist DT aus denselben Gründen gegeben, und wird auf ähnlichem Wege gefunden, wie folgt.

Determination.

Es ist (Fig. 48.) $AD > BC$ (p. hyp.)

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} AD + D\beta \\ A\beta \end{array} \right\} > \left\{ \begin{array}{l} BC + C\beta \\ B\beta \end{array} \right., \text{ wenn } D\beta = \beta C,$$

$$\text{folglich } BY > B\beta.$$

$$\text{mithin } \beta Z > \beta T$$

$$\text{somit } \left. \begin{array}{l} \beta Z^2 \\ \beta D^2 + DZ^2 \end{array} \right\} > \left\{ \begin{array}{l} \beta T^2 \\ DT \cdot TU + \beta D^2 \end{array} \right.$$

$$\text{also } DZ^2 > DT \cdot DU$$

$$\text{folglich } TD : DZ < DZ : TU$$

$$\text{Es ist aber } TD > DZ$$

$$\text{mithin } DZ > TU$$

$$\text{Ferner ist } T\beta > B\beta$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} T\beta - \beta K \\ TK \end{array} \right\} > \left\{ \begin{array}{l} B\beta - \beta C \\ BC \end{array} \right., \text{ wenn } K\beta = \beta C,$$

$$\text{folglich auch } TU > BC$$

$$\text{mithin muss } N \stackrel{=}{<} DZ, N \stackrel{=}{>} BC \text{ seyn.}$$

Es ist (Fig. 49) $AD < BC$

$$\text{also } \frac{AD - D\beta}{A\beta} < \frac{BC - C\beta}{B\beta}, \text{ wenn } D\beta = \beta C,$$

folglich $BY < B\beta$

mithin $\beta Z < \beta T$

$$\text{somit } \frac{\beta Z^2}{\beta D^2 + DZ^2} < \frac{\beta T^2}{DT \cdot TU + \beta D^2}$$

$$\text{also } DZ^2 < DT \cdot TU$$

folglich $TD : DZ > DZ : TU$

Es ist aber $TD < DZ$

mithin ist $DZ < TU$

Ferner ist $T\beta < \beta B$

$$\text{also } \frac{T\beta + \beta K}{TK} < \frac{B\beta + \beta C}{BC}, \text{ wenn } K\beta = \beta C,$$

folglich auch $TU < BC$

mithin muſs $N > DZ$, $N < BC$ seyn.

Construction.

Man mache $ADE = \begin{cases} ADP \text{ (Fig. 48.)} \\ ADG \text{ (Fig. 49.)} \end{cases} = R, ED = DC,$
 $PD = DB, AF = BC, DN = N, NL \# AG \# FE, LM \# DN,$
 $NM \# DL, ON = NM, DOQ = R, PQ \# DO,$ beschreibe
 über GQ als Durchmesser einen Kreis, welcher die
 verlängerte BD in R schneide, und aus D als Mit-
 telpunkt mit einem Radius $= DR$ einen anderen.
 Der Punkt, in welchem derselbe den Bogen BZ
 erreicht, wird die gesuchte Linie bestimmen.

Beweis.

Es ist (Fig. 48.) $N \overset{=}{>} BC$

$$\begin{array}{l} \text{also } ND(BD-DA) \\ ND \cdot DC - ND(AD-BC) \\ FD \cdot DL - ND \cdot DF \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} ND(BD-DA) \\ ND \cdot DC - ND(AD-BC) \\ FD \cdot DL - ND \cdot DF \end{array}} \right\} \overset{=}{>} \left\{ \begin{array}{l} CB(BD-DA) \\ CB \cdot BD - AD(BD-DC) \\ \{AD \cdot DC\} - FD \cdot DB \\ \{FD \cdot DG\} \end{array} \right.$$

$$\text{folglich } LD-DN \left. \vphantom{LD-DN} \right\} \overset{=}{>} GD-DB \quad \text{wenn } D\alpha = \alpha O,$$

$$\text{mithin } 2BD \cdot D\alpha \overset{=}{>} GD \cdot DB - BC^2$$

$$\text{somit } BD^2 + 2BD \cdot D\alpha + \alpha D^2 \overset{=}{>} \left\{ \begin{array}{l} D\alpha^2 + \{GD \cdot DB \\ DR \cdot RO \\ R\alpha^2 \end{array} \right.$$

$$\text{also } BD + D\alpha \overset{=}{>} R\alpha$$

$$\text{folglich } BD \overset{=}{>} \left\{ \begin{array}{l} R\alpha - \alpha D \\ DR \end{array} \right.$$

Es ist (Fig. 49.) $N \overset{=}{<} BC$

$$\begin{array}{l} \text{also } ND(AD-DB) \\ ND \cdot DC - ND(BC-AD) \\ LD \cdot DF - ND \cdot DF \\ (LD-DN)DF \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} ND(AD-DB) \\ ND \cdot DC - ND(BC-AD) \\ LD \cdot DF - ND \cdot DF \\ (LD-DN)DF \end{array}} \right\} \overset{=}{<} \left\{ \begin{array}{l} BC(AD-DB) \\ AD(BD+DC) - CB \cdot BD \\ AD \cdot DC - (BC-AD)BD \\ FD \cdot DG - FD \cdot DB \\ (GD-DB)FD \end{array} \right.$$

$$\text{folglich } 2D\alpha \overset{=}{<} GD-DB, \text{ wenn } D\alpha = \alpha O,$$

$$\text{mithin } 2BD.D\alpha \stackrel{=}{<} GD.DB - BD^2$$

$$\text{somit } BD^2 + 2BD.D\alpha + \alpha D^2 \stackrel{=}{<} \begin{cases} D\alpha^2 + \begin{cases} GD.DB \\ DR.RO \end{cases} \\ R\alpha^2 \end{cases}$$

$$\text{also } BD + D\alpha \stackrel{=}{<} R\alpha$$

$$\text{folglich } BD \stackrel{=}{<} \begin{cases} R\alpha - \alpha D \\ DR \end{cases}$$

$$\text{Ferner ist } DZ \begin{cases} \stackrel{=}{>} \\ \stackrel{=}{=} \\ \stackrel{=}{<} \end{cases} N, \text{ wenn das } \begin{cases} \text{obere} \\ \text{untere} \end{cases} \text{ Zeichen-}$$

paar sich auf Fig. 48. 49. bezieht.

$$\text{also } DZ \begin{cases} \stackrel{=}{>} \\ \stackrel{=}{=} \\ \stackrel{=}{<} \end{cases} \begin{cases} ND.DZ \\ AD.DB \end{cases}$$

$$\text{mithin } BD:DZ \begin{cases} \stackrel{=}{>} \\ \stackrel{=}{=} \\ \stackrel{=}{<} \end{cases} \begin{cases} ND:DA \\ \begin{cases} ND.DG \\ AD.DL \end{cases} - ND.DA:(GD-DA)AD \\ AD(LD-DN):(GD-DA)AD \\ 2D\alpha : GD-DA \end{cases}$$

$$\text{folglich } BD(GD-DA) \begin{cases} \stackrel{=}{>} \\ \stackrel{=}{=} \\ \stackrel{=}{<} \end{cases} 2\alpha D.DZ$$

$$\text{somit } \frac{BD \cdot DG}{R\alpha^2 - \alpha D^2} \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \\ = \\ < \end{array} \right\} \frac{2\alpha D \cdot DZ + \left\{ \begin{array}{l} BD \cdot DA \\ DZ^2 \end{array} \right.}{}$$

$$\text{also } R\alpha^2 \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \\ = \\ < \end{array} \right\} D\alpha^2 + 2\alpha D \cdot DZ + DZ^2$$

$$\text{folglich } R\alpha \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \\ = \\ < \end{array} \right\} \alpha D + DZ$$

$$\text{mithin } \frac{R\alpha - \alpha D}{DR} \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \\ = \\ < \end{array} \right\} DZ$$

Der aus D als Mittelpunkt mit einem Radius = DR beschriebene Kreis erreicht also den Bogen BZ in B, oder Z, oder in einem Punkte T zwischen B, Z. Im ersten Fall ist CB die gesuchte Linie, wie von zweitem DZ selbst erhellet. Im dritten ist

$$\begin{aligned} BD \cdot DG &= DR \cdot RO \\ &= DR(DR + LD - DN) \end{aligned}$$

$$\text{also } \frac{AD \cdot DB : BD \cdot DG}{\begin{array}{l} AD : DG \\ ND : DL \end{array}} \left\{ \begin{array}{l} = VD \cdot DT : DR(DR + LD - DN), \\ \text{wenn die verlängerte TD den} \\ \text{grösseren Kreis in V schneidet,} \\ = VD : DR + LD - DN \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{folglich } \frac{NL : DL}{FD : DC} &\left\{ \begin{array}{l} = VD - DN : RD - DN \text{ (fig. 48.)} \\ = ND - DV : ND - DR \text{ (fig. 49.)} \end{array} \right. \\ \text{weil } WX : XU &= FY : YC, \\ \text{wenn } YXD &= R \text{ (fig. 48. 49.)} \end{aligned}$$

$$\text{also } WX = YU$$

$$\text{folglich } VW = TU$$

$$\text{mithin } \begin{array}{l} TD-DV : \{ DT-TU \\ \quad \quad \quad \{ TU-DT \} \end{array} = \begin{array}{l} RD-DV : \{ RD-DN \\ \quad \quad \quad \{ ND-DR \} \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{fig. 48.} \\ \text{49.} \end{array} \right\}$$

$$\text{somit } \begin{array}{l} ND \\ N \end{array} \} = TU$$

β) Von demjenigen, D, welcher dem grösseren Kreise am nächsten liegt (Fig. 50—53.). Sie soll, wenn DZ auf AD perpendicular steht, und den grösseren Kreis in Z schneidet, liegen zwischen den Bogen BZ, CUD in Fig. 50. 52, oder Fig. 51. 53.

Analysis.

Es sey TU die gesuchte Linie, welche den grösseren Kreis in V schneide. Macht man $AY = YB$, $VW = TU$, $DWF = YXD = R$ und zieht CU, so ist

$$WX : XU = FY : YC$$

$$\text{also } FY = YC$$

$$\text{folglich } AF = BC$$

mithin ist AF der Lage und Grösse nach, somit der Punkt F, und die gerade Linie DF gegeben.

$$\text{Ferner ist } FD : DC \} = WD : DU$$

$$\text{wenn } FD : DC = N : P, N : P \} = \begin{array}{l} N-VD : DT-N \text{ (fig. 50. 52.)} \\ = VD-N : N-DT \text{ (fig. 51. 53.)} \end{array}$$

$$\text{mithin } N : P \} = \begin{array}{l} VD : P+N-DT \text{ (fig. 50-53)} \\ \text{wenn } FD : DC = AD : H, AD : H \} \{ VD : DT : DT(P+N-DT) \\ AD : DB : BD : H \} \end{array}$$

$$\text{also } BD.H = DT(P+N-DT)$$

folglich ist wegen der gegebenen BD, H das Rechteck DT(P+N-DT) der Gröfse nach gegeben. Da auch $DT+(P+N-DT)=P+N$ gegeben ist, so ist DT (Dat. 86.) der Gröfse und (Dat. 28.) der Lage nach gegeben.

Construction.

Man mache $ADE=R$, $ED=DC$, $PD=DB$, $AP=BC$, $DN=N$, $NL \parallel AG \parallel FE$, $LM \parallel DN$, $NM \parallel DI$, $ON=NM$, $DOQ=R$, $PQ \parallel DO$, beschreibe über GQ als Durchmesser einen Kreis, welcher die gerade Linie DO in R erreiche, und aus D als Mittelpunkt mit einem Radius $=DR$ einen zweiten. Der Punkt, in welchem derselbe den Bogen BZ erreicht, wird die gesuchte Linie bestimmen.

Determination.

Damit der aus D als Mittelpunkt mit einem Radius $=DR$ beschriebene Kreis den Bogen BZ erreiche, muß seyn $DR \leq DB$, $DR \leq DZ$ (Fig. 50. 52.), $DR > DB$, $DR \leq DZ$ (Fig. 51. 53.).

N) Es sey $BC < DZ$, so muß also seyn

1) in Fig. 50.

$$\alpha) DR \leq DB$$

$$D\alpha - \alpha R$$

wenn $D\alpha = \alpha O$,

$$\text{also } \alpha D - DB \leq \alpha R$$

$$\text{folglich } D\alpha^2 - 2\alpha D \cdot DB + DB^2 \leq \begin{cases} \alpha R^2 \\ D\alpha^2 - \begin{cases} DR \cdot RO \\ BD \cdot DG \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{mithin } BD^2 + BD \cdot DG \stackrel{=}{<} 2\alpha D \cdot DB$$

$$\text{somit } BD + DG \stackrel{=}{<} LD + DN$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} BD \cdot DF + \{GD \cdot DF\} \\ \{AD \cdot DC\} \\ (BD - DA)BC \end{array} \right\} \stackrel{=}{<} \left\{ \begin{array}{l} LD \cdot DF \\ ND \cdot DC \\ (BD - DA)ND \end{array} \right\} + ND \cdot DF$$

$$\text{folglich } BC \stackrel{=}{<} \left\{ \begin{array}{l} ND \\ N \end{array} \right.$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} DR \\ D\alpha - \alpha R \end{array} \right\} \stackrel{=}{>} DZ$$

$$\text{also } \alpha D - DZ \stackrel{=}{>} R\alpha$$

$$\text{folglich } D\alpha^2 - 2\alpha D \cdot DZ + DZ^2 \stackrel{=}{>} \left\{ \begin{array}{l} R\alpha^2 \\ D\alpha^2 - \{DR \cdot RO \\ BD \cdot DG\} \end{array} \right.$$

$$\text{mithin } \left. \begin{array}{l} DZ^2 + BD \cdot DG \\ BD \cdot DA \\ BD(AD + DG) \end{array} \right\} \stackrel{=}{>} 2\alpha D \cdot DZ$$

$$\text{also } BD : DZ \stackrel{=}{>} \left\{ \begin{array}{l} LD + DN : AD + DG \\ \{LD \cdot DA + ND \cdot DA\} : (AD + DG)AD \\ \{ND \cdot DG\} \\ (GD + DA)ND \\ ND : DA \end{array} \right.$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} \text{BD} \cdot \text{DA} \\ \text{DZ}^2 \end{array} \right\} \stackrel{=}{>} \text{ND} \cdot \text{DZ}$$

$$\text{mithin } \text{DZ} \stackrel{=}{>} \left\{ \begin{array}{l} \text{ND} \\ \text{N} \end{array} \right.$$

Beweis.

$$\text{Es ist } \text{BC} \stackrel{=}{<} \text{N}$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} \text{BC}(\text{BD} - \text{DA}) \\ (\text{BD} + \text{DG})\text{DF} \end{array} \right\} \stackrel{=}{<} \left\{ \begin{array}{l} (\text{BD} - \text{DA})\text{ND} \\ (\text{LD} + \text{DN})\text{DF} \end{array} \right.$$

$$\text{folglich } \text{BD} + \text{DG} \stackrel{=}{<} 2\alpha\text{D}$$

$$\text{mithin } \text{BD}^2 + \text{BD} \cdot \text{DG} \stackrel{=}{<} 2\alpha\text{D} \cdot \text{DB}$$

$$\text{somit } \text{D}\alpha^2 - 2\alpha\text{D} \cdot \text{DB} + \text{AD}^2 \stackrel{=}{<} \text{D}\alpha^2 - \text{BD} \cdot \text{DG}$$

$$\text{Da nun } \text{D}\alpha^2 + \text{DB}^2 \stackrel{=}{>} 2\alpha\text{D} \cdot \text{DB}$$

$$\text{so ist auch } \text{D}\alpha^2 > \text{BD} \cdot \text{DG}$$

Der über GQ als Durchmesser beschriebene Kreis erreicht also die Linie DO. Es geschehe in R, so ist
 $\text{DR} \cdot \text{RO} = \text{BD} \cdot \text{DG}$

$$\text{also } \text{D}\alpha^2 - 2\alpha\text{D} \cdot \text{DB} + \text{BD}^2 \stackrel{=}{<} \left\{ \begin{array}{l} \text{D}\alpha^2 - \text{DR} \cdot \text{RO} \\ \text{R}\alpha^2 \end{array} \right.$$

$$\text{folglich } \alpha\text{D} - \text{DB} \stackrel{=}{<} \text{R}\alpha, \text{ oder } \text{BD} - \text{D}\alpha \stackrel{=}{<} \text{R}\alpha$$

$$\text{mithin } \left. \begin{array}{l} \text{D}\alpha - \alpha\text{R} \\ \text{DR} \end{array} \right\} \stackrel{=}{<} \text{DB}, \text{ oder } \text{BD} \stackrel{=}{<} \left\{ \begin{array}{l} \text{R}\alpha + \alpha\text{D} \\ \text{DR}' \end{array} \right.$$

wenn $\text{R}\alpha = \alpha\text{R}'$

Ferner ist $DZ \overline{=} N$

$$\text{somit } \left. \begin{array}{l} DZ^2 \\ BD \cdot DA \end{array} \right\} \overline{=} ND \cdot DZ$$

$$\text{also } BD:DZ \overline{=} \left\{ \begin{array}{l} ND:DA \\ \{GD \cdot DN\} + ND \cdot DA:(GD+DA)AD \\ LD:DA \\ LD+DN:GD+DA \end{array} \right.$$

$$\text{folglich } BD \cdot DG + \left\{ \begin{array}{l} BD \cdot DA \\ DZ^2 \end{array} \right\} \overline{=} 2\alpha D \cdot DZ$$

$$\text{mithin } D\alpha^2 - 2\alpha D \cdot DZ + DZ^2 \overline{=} \left\{ \begin{array}{l} D\alpha^2 - \{BD \cdot DG \\ DR \cdot RO \\ R\alpha^2 \end{array} \right.$$

$$\text{somit } \alpha D - DZ \overline{=} R\alpha$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} D\alpha - \alpha R \\ DR \end{array} \right\} \overline{=} DZ$$

Der aus D als Mittelpunkt mit einem Radius = DR beschriebene Kreis erreicht also den Bogen BZ in B, oder Z, oder in einem Punkte T zwischen B, Z. (Der aus D als Mittelpunkt mit einem Radius = DR' beschriebene Kreis erreicht den Bogen BZ in B, oder gar nicht.) Im ersten Fall ist BC, im zweiten DZ die gesuchte Linie, wie von selbst erhellet. Im dritten ist $BD \cdot DG = DR \cdot RO$

$$= DR \cdot (ND + DL - DR)$$

$$\begin{array}{l} \text{also } AD \cdot DB : BD \cdot DG \\ \quad AD : DG \\ \quad ND : DL \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} AD \cdot DB : BD \cdot DG \\ AD : DG \\ ND : DL \end{array}} \right\} = VD \cdot DT : DR (ND + DL - DR) \\ = VD : ND + DL - DR$$

$$\text{folglich } ND : DL \left. \vphantom{ND : DL} \right\} = ND - DV : RD - DN$$

$$FD : \begin{cases} DE \\ DC \end{cases}$$

$$WD : DU$$

$$TU - DV : DT - TU \quad \text{weil } WX : XU = FY : YC, \\ \text{wenn } YXD = R$$

$$\text{also } WX = XU$$

$$\text{folglich } VW = TU$$

$$\text{mithin } TD - DV : DT - TU = RD - DV : RD - DN$$

$$\text{somit } DT - TU = RD - DN$$

$$\text{und } TU = DN$$

2) In Fig. 51.

$$\text{a) } DR \left. \vphantom{DR} \right\} \begin{array}{l} = DB \\ D\alpha + \alpha R \end{array}$$

$$\text{also } \alpha R \begin{array}{l} = BD - DA \\ > \end{array}$$

$$\text{folglich } \alpha R^2 \left. \vphantom{\alpha R^2} \right\} \begin{array}{l} = BD^2 - 2BD \cdot D\alpha + \alpha D^2 \\ D\alpha^2 - \begin{cases} DR \cdot RO \\ BD \cdot DG \end{cases} \end{array}$$

$$\text{mithin } 2BD \cdot D\alpha \begin{array}{l} = BD^2 + BD \cdot DG \\ > \end{array}$$

$$\text{somit } LD + DN \begin{array}{l} = BD + DG \\ > \end{array}$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} \text{LD.DF} \\ \text{ND.DC} \\ \text{ND(AD-DB)} \end{array} \right\} + \text{ND.DF} \Bigg\} \begin{array}{l} \text{BD.DF} + \{ \text{GD.DF} \\ \text{AD.DC} \} \\ \text{(AD-DB)BC} \end{array}$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} \text{ND} \\ \text{N} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{BC} \\ \text{N} \end{array}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} \text{DR} \\ \text{D}\alpha + \alpha\text{R} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{DZ} \\ \text{D}\alpha + \alpha\text{R} \end{array}$$

$$\text{also } \alpha\text{R} \begin{array}{l} \text{ZD} \\ \text{D}\alpha \end{array}$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} \alpha\text{R}^2 \\ \text{D}\alpha^2 \cdot \{ \text{DR.RO} \} \\ \text{BD.DG} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{DZ}^2 - 2\alpha\text{D.DZ} + \text{D}\alpha^2 \\ \text{BD.DG} \end{array}$$

$$\text{mithin } 2\alpha\text{D.DZ} \begin{array}{l} \text{DZ}^2 \\ \text{BD.DA} \\ \text{BD(AD+DG)} \end{array} + \text{BD.DG}$$

$$\text{somit } \text{BD:DZ} \begin{array}{l} \text{ND+DL:AD+DG} \\ \{ \text{ND.DA} + \{ \text{LD.DA} \} : (\text{AD+DG})\text{AD} \\ \{ \text{ND.DG} \} \\ \text{ND(AD+DG)} \\ \text{ND:DA} \end{array}$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} \text{BD.DA} \\ \text{DZ}^2 \end{array} \right\} \text{ND.DZ}$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} \text{DZ} \\ \text{N} \end{array} \right\} \text{ND}$$

Beweis.

Es ist $N \stackrel{=}{>} BC$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} ND(AD-DB) \\ (LD+DN)DF \end{array} \right\} \stackrel{=}{>} \left\{ \begin{array}{l} (AD-DB)EC \\ (BD+DG)DF \end{array} \right.$$

$$\text{folglich } 2BD.D\alpha \stackrel{=}{>} BD^2 + BD.DG$$

$$\text{mithin } D\alpha^2 - BD.DG \stackrel{=}{>} BD^2 - 2BD.D\alpha + D\alpha^2$$

$$\text{Da } BD^2 + D\alpha^2 \stackrel{=}{>} 2BD.D\alpha$$

$$\text{so ist } D\alpha^2 \stackrel{=}{>} BD.DG$$

Der über GQ als Durchmesser beschriebene Kreis erreicht also die gerade Linie DO. Es geschehe in R, so ist $DR.RO = BD.DG$

$$\text{also } D\alpha^2 - DR.RO \stackrel{=}{>} BD^2 - 2BD.D\alpha + D\alpha^2$$

$$\text{folglich } R\alpha \stackrel{=}{>} BD - D\alpha, \text{ oder } R\alpha \stackrel{=}{>} \alpha D - DB$$

$$\text{mithin } \left. \begin{array}{l} R\alpha + \alpha D \\ DR \end{array} \right\} \stackrel{=}{>} BD, \quad BD \stackrel{=}{>} \left\{ \begin{array}{l} D\alpha - \alpha R \\ DR' \end{array} \right.$$

wenn $R\alpha = \alpha R'$

$$\text{Ferner ist } DZ \stackrel{=}{>} N$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} DZ^2 \\ BD.DA \end{array} \right\} \stackrel{=}{>} ND.DZ$$

$$\text{folglich } BD:DZ \stackrel{=}{>} \begin{cases} ND:DA \\ ND(AD+DG):DA(AD+DG) \\ ND+DL:AD+DG \end{cases}$$

$$\text{mithin } BD(AD+DG) \stackrel{=}{>} 2\alpha D.DZ$$

$$\text{somit } DZ^2 - 2\alpha D.DZ + D\alpha^2 \stackrel{=}{>} \begin{cases} D\alpha^2 - \begin{cases} BD.DG \\ DR.RO \end{cases} \\ R\alpha^2 \end{cases}$$

$$\text{also } ZD - D\alpha \stackrel{=}{>} R\alpha$$

$$\text{folglich } DZ \stackrel{=}{>} \begin{cases} R\alpha + \alpha D \\ DR \end{cases}$$

Der aus D als Mittelpunkt mit einem Radius = DR beschriebene Kreis erreicht also den Bogen BZ in B, oder Z, oder in einem Punkte T zwischen B, Z. (Der aus D als Mittelpunkt mit einem Radius = DR' beschriebene Kreis erreicht den Bogen BZ in B, oder gar nicht.) Im ersten Fall ist BC, im zweiten DZ die gesuchte Linie, wie von selbst erhellet. Im dritten ist

$$\begin{aligned} BD.DG &= DR.RO \\ &= DR(LD+DN-DR) \end{aligned}$$

$$\text{also } \begin{cases} AD.DB:BD.DG \\ AD:DG \\ ND:DL \end{cases} = \begin{cases} VD.DT:DR(LD+DN-DR) \\ VD:LD+DN-DR \end{cases}$$

$$\text{folglich } \begin{cases} ND:DL \\ FD:DE \\ WD:DU \end{cases} = VD-DN:ND-DR$$

$$VD-TU:TU-DT \quad \text{weil } WX:XU = FY:YC, \\ \text{wenn } YXD = R$$

$$\text{also } WX = XU$$

$$\text{somit } VW = TU$$

$$\text{folglich } VD - DT : TU - DT = VD - DR : ND - DR$$

$$\text{mithin } TU - DT = ND - DR$$

$$\text{somit } TU = \begin{cases} DN \\ N \end{cases}$$

2) Es sey $BC > DZ$, so muß also seyn

1) In Fig. 52.

$$\text{a) } DR \begin{cases} \overline{=} \\ < \end{cases} DB \\ Da + aR$$

$$\text{b) } DR \begin{cases} \overline{=} \\ > \end{cases} DZ \\ Da + aR$$

$$\text{also } N \begin{cases} \overline{=} \\ < \end{cases} BC,$$

$$\text{also } DZ \begin{cases} \overline{=} \\ > \end{cases} N$$

wie vorhin unter N. 2. a. b.

2) In Fig. 53.

$$\text{a) } DR \begin{cases} \overline{=} \\ > \end{cases} DB, \\ Da - aR$$

$$\text{b) } DR \begin{cases} \overline{=} \\ < \end{cases} DZ \\ Da - aR$$

$$\text{also } BC \begin{cases} \overline{=} \\ > \end{cases} N,$$

$$\text{also } DZ \begin{cases} \overline{=} \\ < \end{cases} N,$$

wie vorhin, unter N. 1. a. b.

Beweis. Wie vorhin, unter N. 1. 2.

1) Es sey $BC = DZ$, so muß seyn

$$1) \text{ in Fig. 50. } DR \begin{cases} \overline{=} \\ > \end{cases} DB, DR \begin{cases} \overline{=} \\ < \end{cases} DZ$$

$$\text{also } BC \begin{cases} \overline{=} \\ < \end{cases} N, DZ \begin{cases} \overline{=} \\ > \end{cases} N$$

2) in Fig. 51.

$$DR \begin{cases} \overline{=} \\ > \end{cases} DB, DR \begin{cases} \overline{=} \\ < \end{cases} DZ$$

$$\text{also } BC \stackrel{=}{<} N, \quad DZ \stackrel{=}{>} N$$

Da diese Bedingungen nur $BC=N$, $DZ=N$ gestatten, so sind BC, DZ die gesuchten Linien.

B) Der eine liegt ausserhalb des anderen (Fig. 54–57.).

a) Die gesuchte Linie soll gezogen werden von einem der äusseren Endpunkte D der Durchmesser (Fig. 54. 55.). Sie soll, wenn die gerade Linie DZ den Kreis über AB in Z berührt, den Kreis über DC in S schneidet, liegen zwischen den Bogen BZ , CS in Fig. 54. oder in Fig. 55.

Analysis.

Es sey TU die gesuchte Linie, welche den über AB liegenden Kreis in V schneide. Macht man $AY=YB$, $VW=TU$, $DWF=YXD=R$, und zieht CU , so ist $WX:XU=FY:YC$

$$\text{also } FY=YC$$

$$\text{folglich } AF=BC$$

mithin ist AF der Lage und Grösse nach, somit der Punkt F , und die gerade Linie DF gegeben.

$$\text{Ferner ist } FD:DC = WD:DU$$

$$\text{wenn } FD:DC = N:P, \quad N:P = \frac{VD+TU}{DT-TU} = \frac{VD+N}{DT-N}$$

$$\begin{array}{l} \text{also } N:P = \frac{VD:DT-N-P}{AD:H} \\ \text{BD.DA:BD.H} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} VD:DT-N-P \\ VD.DT:DT(DT-N-P), \text{ wenn} \\ FD:DC=AD:H, \end{array} \right.$$

$$\text{also } BD.H = DT(DT-N-P)$$

folglich ist wegen der gegebenen BD, H das Rechteck $DT(DT-N-P)$ der Grösse nach gegeben. Da auch

DT—(DT—N—P)=N+P gegeben ist, so ist DT (Dat. 85.) der Grösse und (Dat. 28.) der Lage nach gegeben.

Determination.

Es ist (fig. 54.) $TD > DB$, $UD < DC$, u. $ZD > DT$, $SD < DU$

also $\frac{TD-DU}{TU} > \frac{BD-DC}{BC}$, also $\frac{ZD-DS}{ZS} > \frac{TD-DU}{TU}$

folglich muß $N \overline{=} BC$, $N \overline{=} ZS$ seyn.

Es ist (Fig. 55.) $ZS:SD = YC:CD = XU:UD$

Da $SD < DZ$, $CD > DU$

so ist $ZS < XU$, $YC > XU$

also auch $ZS < TU$, $\frac{CY+YB}{BC} > \frac{UX+XF}{TU}$

folglich muß $N \overline{=} BC$, $N \overline{=} ZS$ seyn.

Construction.

Man mache $ADE = ADP = R$, $ED = DC$, $PD = DB$, $AF = DC$, $DN = N$, $NL \# AG \# FE$, $LM \# DN$, $NM \# DL$, $ON = NM$, $DOQ = R$, $PQ \# DO$, beschreibe über GQ als Durchmesser einen Kreis, welcher die verlängerte DB in R schneide, und aus D als Mittelpunkt mit einem Radius $= DR$ einen zweiten. Der Punkt, in welchem derselbe den Bogen BZ erreicht, wird die gesuchte Linie bestimmen.

Beweis.

Es ist $N \left\{ \begin{smallmatrix} (=) \\ > \\ (=) \\ < \end{smallmatrix} \right\} BC$, wenn das $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{obere} \\ \text{untere} \end{smallmatrix} \right\}$ Zeichen-
paar sich auf Fig. $\left\{ \begin{smallmatrix} 54. \\ 55. \end{smallmatrix} \right\}$ bezieht.

$$\begin{aligned} \text{also } ND(AD+DB) & \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \\ = \\ < \end{array} \right\} \begin{array}{l} BC(AD+DB) \\ \left\{ \begin{array}{l} BC \cdot AD \\ AD(BD-DC) \end{array} \right\} + DB \cdot BC \\ (AD+BC)BD - \left\{ \begin{array}{l} AD \cdot DC \\ GD(AD+BC) \end{array} \right\} \\ (AD+BC)(BD-DG) \end{array}$$

$$\text{folglich } LD+DN \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \\ = \\ < \end{array} \right\} BD-DG$$

$2D\alpha$

wenn $D\alpha = \alpha O$,

$$\text{mithin } 2\alpha D \cdot DB \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \\ = \\ < \end{array} \right\} BD^2 - BD \cdot DG$$

$$\text{somit } \left\{ \begin{array}{l} BD \cdot DG \\ DR \cdot RO \\ R\alpha^2 \end{array} \right\} + D\alpha^2 \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \\ = \\ < \end{array} \right\} BD^2 - 2BD \cdot D\alpha + D\alpha^2$$

$$\text{also } R\alpha \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \\ = \\ < \end{array} \right\} BD - D\alpha$$

$$\text{folglich } R\alpha + \alpha D \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \\ = \\ < \end{array} \right\} BD$$

DR

$$\text{Ferner ist } SZ \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \\ = \\ < \end{array} \right\} N, \text{ wenn das } \left\{ \begin{array}{l} \text{obere} \\ \text{untere} \end{array} \right\} \text{Zei-}$$

chenpaar sich auf Fig.

$\left\{ \begin{array}{l} 54. \\ 55. \end{array} \right\}$ bezieht.

$$\begin{array}{l} \text{also } SZ:ZD \\ \quad CY:YD \\ \quad 2CY:2YD \\ FD-DC:FD+DC \\ AD-DG:AD+DG \end{array} \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \\ = \\ < \end{array} \right\} ND:DZ$$

Da nun $AD : DG = ND : DL$

folglich $AD+DG : AD = ND+DL : ND$

$$\text{so ist } AD-DG : AD \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \\ = \\ < \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} ND+DL \\ 2D\alpha \end{array} \right\} : DZ$$

$$\text{mithin } AD : DG \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \\ = \\ < \end{array} \right\} DZ : DZ - 2D\alpha$$

$$\text{somit } \begin{array}{l} AD : DZ \\ ZD : DB \end{array} \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \\ = \\ < \end{array} \right\} DG : DZ - 2D\alpha$$

$$\text{also } DZ^2 - 2BD.DA \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \\ = \\ < \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} BD.DG \\ R\alpha^2 - \alpha D^2 \end{array} \right\}$$

$$\text{folglich } DZ^2 - 2BD.D\alpha + \alpha D^2 \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \\ = \\ < \end{array} \right\} R\alpha^2$$

$$\text{mithin } ZD - D\alpha \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \\ = \\ < \end{array} \right\} R\alpha$$

$$\text{somit } DZ \begin{cases} = \\ > \\ = \\ < \end{cases} \begin{cases} R\alpha + \alpha D \\ DR \end{cases}$$

Der aus D als Mittelpunkt mit einem Radius = DR beschriebene Kreis erreicht also den Bogen BZ in B, oder Z, oder in einem Punkte T zwischen B, Z. Im ersten Fall ist BC, im zweiten SZ die gesuchte Linie, wie von selbst erhellet. Im dritten ist

$$\begin{aligned} BD \cdot DG &= DR \cdot RO \\ &= DR(DR - ND - DL) \end{aligned}$$

$$\text{also } \begin{aligned} AD \cdot DB : BD \cdot DG &= VD \cdot DT : DR(RD - ND - DL) \\ AD : DG &= VD : DR - ND - DL \\ ND : DL &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{folglich } \begin{aligned} ND : DL &= VD + DN : RD - DN \\ FD : DC & \\ WD : DU & \end{aligned} & \begin{aligned} &\text{wenn } DWF = R, \\ &\text{weil } WX : XU = FY : YC, \\ &\text{wenn } YXD = R \end{aligned} \\ VD + TU : DT - TU & \end{aligned}$$

$$\text{also } WX = XU$$

$$\text{folglich } VW = TU$$

$$\text{mithin } VD + DT : DT - TU = VD + DR : RD - DN$$

$$\text{somit } DT - TU = RD - DN$$

$$\text{und } TU = \begin{cases} DN \\ N \end{cases}$$

b) Die gesuchte Linie soll gezogen werden von einem der inneren Endpunkte, D, der Durchmesser (Fig. 56. 57.). Sie soll, wenn die gerade Linie DZ den Kreis über AB in Z berührt, den Kreis über

CD in S schneidet, liegen zwischen den Bogen BZ, CS.
 Fig. $\left. \begin{matrix} 56. \\ 57. \end{matrix} \right\}$.

Analysis.

Es sey TU die gesuchte Linie, welche den Kreis über AB in V schneide. Macht man $AY=YB$, $VW=TU$, $DWF=YXD=R$, und zieht CU, so ist

$$WX : XU = FY : YC$$

$$\text{also } FY = YC$$

$$\text{folglich } AF = BC$$

mithin ist AF der Lage und Gröfse nach, somit der Punkt F, und die gerade Linie DF gegeben.

$$\text{Ferner ist } FD:DC \left\{ \begin{matrix} = WD:DU \\ = DV + TU: TU - DT, \text{ wenn} \end{matrix} \right.$$

$$FD:DC = N:P,$$

$$= VD + N:N - DT$$

$$\text{also } N:P \left\{ \begin{matrix} = VD:N - P - DT \\ = VD.DT:DT(N - P - DT), \end{matrix} \right.$$

$$BD.DA:AD.H \left\{ \begin{matrix} \\ \end{matrix} \right. \text{ wenn } FD:DC = AD:H$$

$$\text{folglich } AD.H = DT(N - P - DT)$$

mithin ist wegen der gegebenen AD, H das Rechteck $DT(N - P - DT)$ der Gröfse nach gegeben. Da auch $DT + (N - P - DT) = N - P$ gegeben ist, so ist DT (Dat. 86.) der Gröfse und (Dat. 28.) der Lage nach gegeben.

Construction.

Man mache $ADE=R$, $ED=DC$, $PD=DB$, $AF=BC$, $DN=N$, $NL \# AG \# FE$, $LM \# DN$, $NM \# DL$,

ON=NM, DOQ=R, PQ#DO, beschreibe über GQ als Durchmesser einen Kreis, welcher die gerade Linie DO in R schneide, und aus D als Mittelpunkt mit einem Radius = DR einen anderen. Der Punkt, in welchem derselbe den Bogen BZ erreicht, wird die gesuchte Linie bestimmen.

Determination.

Damit der aus D als Mittelpunkt mit einem Radius = DR beschriebene Kreis den Bogen BZ erreiche,

mufs $DR \left\{ \begin{smallmatrix} = \\ < \\ = \\ > \end{smallmatrix} \right\} DB, DR \left\{ \begin{smallmatrix} = \\ > \\ = \\ < \end{smallmatrix} \right\} DZ$ seyn, wenn das $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{obere} \\ \text{untere} \end{smallmatrix} \right\}$

Zeichenpaar sich auf Fig. $\left\{ \begin{smallmatrix} 56. \\ 57. \end{smallmatrix} \right\}$ bezieht.

Da $DR \left\{ \begin{smallmatrix} = \\ < \\ = \\ > \end{smallmatrix} \right\} DB$ seyn mufs,
 $D\alpha + \alpha R \left\{ \begin{smallmatrix} = \\ < \\ = \\ > \end{smallmatrix} \right\}$ wenn $D\alpha = \alpha O,$

so mufs $R\alpha \left\{ \begin{smallmatrix} = \\ < \\ = \\ > \end{smallmatrix} \right\} BD - D\alpha$

also $R\alpha^2 \left\{ \begin{smallmatrix} = \\ < \\ = \\ > \end{smallmatrix} \right\} BD^2 - 2BD.D\alpha + D\alpha^2$
 $D\alpha^2 - DR.RO \left\{ \begin{smallmatrix} = \\ < \\ = \\ > \end{smallmatrix} \right\}$

folglich $2BD.D\alpha \left\{ \begin{smallmatrix} = \\ < \\ = \\ > \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} BD^2 + \{ DR.RO \\ BD.DG \} \\ BD(BD + DG) \end{smallmatrix} \right.$

$$\text{mithin } 2D\alpha \left\{ \begin{array}{c} < \\ = \\ > \end{array} \right\} BD + DG$$

$$\begin{array}{l} \text{somit } ND.DF - LD.DF \\ ND(BC + AD) - ND.DC \\ ND(AD + DB) \end{array} \left\{ \begin{array}{c} < \\ = \\ > \end{array} \right\} \begin{array}{l} BD.DF + FD.DG \\ DB(BC + AD) + AD.DC \\ (AD + DB)BC \end{array}$$

$$\text{also } ND \left\{ \begin{array}{c} < \\ = \\ > \end{array} \right\} BC \text{ seyn.}$$

$$\text{Da } DZ \left\{ \begin{array}{c} < \\ = \\ > \end{array} \right\} \begin{array}{l} DR \text{ seyn mu\ss,} \\ D\alpha + \alpha R \end{array}$$

$$\text{so mu\ss } ZD - D\alpha \left\{ \begin{array}{c} < \\ = \\ > \end{array} \right\} R\alpha$$

$$\text{also } DZ^2 - 2ZD.D\alpha + \alpha D^2 \left\{ \begin{array}{c} < \\ = \\ > \end{array} \right\} R\alpha^2$$

$$\begin{array}{l} \text{folglich } D\alpha^2 - \alpha R^2 \\ DR.RO \\ BD.DG \end{array} \left\{ \begin{array}{c} < \\ = \\ > \end{array} \right\} (2\alpha D - DZ)DZ$$

$$\text{mithin } \begin{array}{l} ZD : DB \\ AD : DZ \end{array} \left\{ \begin{array}{c} < \\ = \\ > \end{array} \right\} DG : 2\alpha D - DZ$$

$$\text{somit } AD : DG \left\{ \begin{array}{c} \overline{=} \\ > \\ \overline{=} \\ < \end{array} \right\} DZ : 2\alpha D - DZ$$

$$\text{also } AD + DG : AD \left\{ \begin{array}{c} \overline{=} \\ < \\ \overline{=} \\ > \end{array} \right\} 2\alpha D : DZ \text{ seyn.}$$

$$\text{Nun ist } AD : DG = ND : DL$$

$$\text{folglich } AD : AD - DG = ND : ND - DL$$

$$\begin{array}{l} \text{also muss } AD + DG : AD - DG \\ \quad FD + DC : FD - DC \\ \quad 2CY : 2YD \\ \quad CY : YD \\ \quad SZ : DZ \end{array} \left\{ \begin{array}{c} \overline{=} \\ < \\ \overline{=} \\ > \end{array} \right\} ND : DZ$$

wenn $AY = YB$,

$$\text{folglich } SZ \left\{ \begin{array}{c} \overline{=} \\ < \\ \overline{=} \\ > \end{array} \right\} ND \text{ seyn.}$$

N

Beweis.

$$\text{Es ist } N \left\{ \begin{array}{c} \overline{=} \\ < \\ \overline{=} \\ > \end{array} \right\} BC \text{ (Det.)}$$

$$\begin{array}{l} \text{also } ND(AD + DB) \\ \quad (ND - DL)DF \end{array} \left\{ \begin{array}{c} \overline{=} \\ < \\ \overline{=} \\ > \end{array} \right\} \begin{array}{l} (AD + DB)BC \\ (BD + DG)DF \end{array}$$

$$\text{folglich } 2\alpha D \left\{ \begin{array}{c} = \\ < \\ = \\ > \end{array} \right\} BD + DG, \quad \text{wenn } Da = \alpha O,$$

$$\text{mithin } 2\alpha D \cdot DB \left\{ \begin{array}{c} = \\ < \\ = \\ > \end{array} \right\} BD^2 + BD \cdot DG$$

$$\text{somit } Da^2 - BD \cdot DG \left\{ \begin{array}{c} = \\ < \\ = \\ > \end{array} \right\} BD^2 - 2\alpha D \cdot DB + Da^2$$

$$Da \quad BD^2 + Da^2 \stackrel{=}{>} 2\alpha D \cdot DB$$

so ist für das untere Zeichenpaar $Da^2 \stackrel{=}{>} BD \cdot DG$

$$\text{Ferner ist } SZ \left\{ \begin{array}{c} = \\ < \\ = \\ > \end{array} \right\} N$$

$$\begin{array}{l} \text{also } SZ : ZD \\ AD + DG : AD - DG \end{array} \left\{ \begin{array}{c} = \\ < \\ = \\ > \end{array} \right\} ND : DZ$$

Nun ist $AD : DG = ND : DL$

$$\text{also } AD - DG : AD = \left\{ \begin{array}{c} ND - DL \\ 2\alpha D \end{array} \right\} : ND$$

$$\text{folglich } AD + DG : AD \left\{ \begin{array}{c} = \\ < \\ = \\ > \end{array} \right\} 2\alpha D : DZ$$

$$\text{mithin } AD : DG \left\{ \begin{array}{c} = \\ > \\ = \\ < \end{array} \right\} DZ : 2\alpha D - DZ$$

$$\text{somit } \begin{matrix} AD:DZ \\ ZD:DB \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} = \\ > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} DG:2\alpha D-DZ$$

$$\text{also } (2\alpha D-DZ)DZ \left\{ \begin{matrix} = \\ > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} BD.DG.$$

$$\text{folglich } D\alpha^2-BD.DG \left\{ \begin{matrix} = \\ > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} DZ^2-2\alpha D.DB+D\alpha^2$$

$$\text{Es ist aber } DZ^2+D\alpha^2 \stackrel{=}{>} 2\alpha D.DB$$

mithin ist für das obere Zeichenpaar $\alpha D^2 \stackrel{=}{>} BD.DG$

Der über GQ als Durchmesser beschriebene Kreis erreicht also die gerade Linie DO. Es geschehe in R, so ist DR.RO=BD.DG, folglich

$$\text{sowohl } \begin{matrix} D\alpha^2-DR.RO \\ R\alpha^2 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} = \\ < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} BD^2-2BD.D\alpha+\alpha D^2$$

$$\text{mithin } R\alpha \left\{ \begin{matrix} = \\ < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} BD-D\alpha$$

$$\text{somit } \begin{matrix} R\alpha+\alpha D \\ DR \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} = \\ < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} BD$$

$$\text{als auch } \begin{matrix} D\alpha^2-DR.RO \\ R\alpha^2 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} = \\ > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} DZ^2-2\alpha D.DB+D\alpha^2$$

$$\text{mithin } R\alpha \left\{ \begin{array}{c} \overline{=} \\ > \\ \overline{=} \\ < \end{array} \right\} ZD - D\alpha, \text{ und } R\alpha \left\{ \begin{array}{c} \overline{=} \\ > \\ \overline{=} \\ < \end{array} \right\} \alpha D - DZ$$

$$\text{somit } R\alpha + \alpha D \left\{ \begin{array}{c} \overline{=} \\ > \\ \overline{=} \\ < \end{array} \right\} DZ, \quad \text{und } DZ \left\{ \begin{array}{c} \overline{=} \\ > \\ \overline{=} \\ < \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} D\alpha - \alpha R \\ DR' \end{array} \right\},$$

wenn $\alpha R' = \alpha R$,

Der aus D als Mittelpunkt mit einem Radius $= DR$ beschriebene Kreis erreicht also den Bogen BZ in B, oder Z, oder in einem Punkte T zwischen B, Z. (Ein aus D als Mittelpunkt mit einem Radius $= DR'$ beschriebene Kreis erreicht ihn in Z, oder gar nicht.) Im ersten Fall ist BC, im zweiten ZS die gesuchte Linie, wie von selbst erhellet. Im dritten ist

$$BD \cdot DG = DR \cdot RO$$

$$= DR(ND - DL - DR)$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} BD \cdot DA : BD \cdot DG \\ AD : DG \\ ND : DL \end{array} \right\} = \begin{array}{l} VD \cdot DT : DR(ND - DL - DR) \\ \text{wenn DT den Kreis über AB} \\ \text{in V schneidet,} \\ VD : ND - DL - DR \end{array}$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} ND : DL \\ FD : DC \\ WD : DU \end{array} \right\} = \begin{array}{l} VD + DN : ND - DR \\ \text{wenn FWD} = R, \text{ und DT den} \\ \text{Kreis über CD in U schneidet,} \\ \text{weil } WX : XU = FY : YC \\ \text{wenn YXD} = R, \end{array}$$

$$\text{also } WX = XU$$

$$\text{folglich } VW = TU$$

mithin $TU - DT = ND - DR$

$$\text{somit } TU = \begin{cases} ND \\ N \end{cases}$$

C) Der eine Kreis schneidet den anderen (Fig. 58–75.).

a) Die gesuchte Linie soll gezogen werden von einem der äusseren Endpunkte, D, der Durchmesser (Fig. 58–67.). Der andere Endpunkt C des Durchmessers CD fällt

α) in den Mittelpunkt des über AB beschriebenen Kreises (Fig. 58. 59.). Die gesuchte Linie soll, wenn die gerade Linie DZ den Punkt D mit dem Durchschnittspunkte Z beider Kreise verbindet, zwischen den Bogen BZ, CZ (Fig. 58.), oder BZ, AZ (Fig. 59.) liegen.

Analysis.

Es sey TU die gesuchte Linie, welche den Kreis über AB in V schneide. Zieht man CU, so ist $CUD = R$, also $TU = UV$, folglich $TV = 2TU = 2N$, mithin ist TV eine gegebene gerade Linie, somit die Aufgabe auf Buch I. Aufgabe 1. reducirt.

β) Zwischen den Mittelpunkt des anderen Kreises, und denjenigen Endpunkt seines Durchmessers, welcher dem Punkte D am nächsten liegt (Fig. 60–63). Die gesuchte Linie soll, wenn die den Durchschnitt H beider Kreise mit D verbindende gerade Linie DH den über AB liegenden Kreis in K schneidet, und die diesen Kreis in Z berührende gerade Linie DZ den über CD liegenden in S schneidet, liegen

N) Zwischen den Bogen BK, CH (Fig. 60.).

Analysis.

Es sey TU die gesuchte Linie, welche den über AB liegenden Kreis in V schneide. Macht man $AY=YB$, $VW=TU$, $DWF=YX=DR$ und zieht CU, so ist $WX:XU=FY:YC$

$$\text{also } FY=YC$$

$$\text{folglich } AF=BC$$

mithin ist AF der Lage und Gröfse nach, somit der Punkt F, und die gerade Linie DF gegeben.

Ferner ist $FD:DC = WD:DU$

$$\begin{aligned} N:P & \left\{ \begin{aligned} &= VD+TU:DT-TU, \text{ wenn} \\ &FD:DC=N:P \\ &= VD+N:DT-N \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{für } FD:DC=AD:H, AD:H & \left\{ \begin{aligned} &\text{also } N:P = \{ VD:DT-N-P \\ &BD.DA:BD.H \} \{ VD.DT:DT(DT-N-P) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\text{folglich ist } BD.H=DT(DT-N-P)$$

mithin ist wegen der gegebenen BD, H das Rechteck $DT(DT-N-P)$ gegeben. Da auch $DT-(DT-N-P)=N+P$ gegeben ist, so ist DT (Dat. 85.) der Gröfse und (Dat. 28.) der Lage nach gegeben.

Determination.

Macht man $KI=IH$, und zieht IY, CH, so ist

$$IH:HD=YC:CD=XU:UD$$

$$\text{Da nun } HD<DU, UD<DC$$

$$\text{so ist } IH<UX, XU<CY$$

$$\text{Und weil } KI<TX, TX<BY$$

$$\text{so ist } \begin{matrix} HI+IK \\ HK \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} < \\ < \end{matrix} \right\} \begin{matrix} UX+XT \\ TU \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} < \\ < \end{matrix} \right\} \begin{matrix} CY+YB \\ BC \end{matrix}$$

also muß $N \overset{=}{>} HK, N \overset{=}{<} BC$ seyn.

Construction.

Man mache $ADE=ADP=R, ED=DC, PD=DB, AF=BC, DN=N, NL \# AG \# FE, LM \# DN, NM \# DE, ON=NM, DOQ=R, PQ \# DO$, beschreibe über GQ als Durchmesser einen Kreis, welcher die verlängerte DO in R schneide, und aus D als Mittelpunkt mit einem Radius $=DR$ einen anderen. Der Punkt, in welchem derselbe den Bogen BK erreicht, wird die gesuchte Linie bestimmen.

Beweis.

$$\text{Es ist } BC \overset{=}{>} N$$

$$\begin{matrix} \text{somit } (AD+DB)BC \\ AD \cdot BC \} + DB \cdot BC \\ AD(BD-DC) \} \\ (AD+BC)DB - \left\{ \begin{matrix} AD \cdot DC \\ GD(AD+BC) \end{matrix} \right\} \\ (AD+BC)(BD-DG) \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \right\} \begin{matrix} ND(AD+DB) \\ ND \cdot DA + \left\{ \begin{matrix} ND \cdot DB \\ ND(DC+CB) \end{matrix} \right\} \\ ND(AD+BC) + LD(AD+BC) \\ (ND+DL)(AD+BC) \end{matrix}$$

$$\text{also } BD-DG \overset{=}{>} \begin{cases} ND+DL \\ 2D\alpha, \text{ wenn } D\alpha = \alpha O, \end{cases}$$

$$\text{folglich } BD^2 - BD \cdot DG \overset{=}{>} 2BD \cdot D\alpha$$

$$\text{mithin } BD^2 - 2BD \cdot D\alpha + D\alpha^2 \overset{=}{>} \begin{cases} D\alpha^2 + \left\{ \begin{matrix} BD \cdot DG \\ DR \cdot RO \end{matrix} \right\} \\ R\alpha^2 \end{cases}$$

$$\text{somit } BD - D\alpha \stackrel{=}{>} R\alpha$$

$$\text{und } BD \stackrel{=}{>} \begin{cases} R\alpha + \alpha D \\ DR \end{cases}$$

$$\text{Ferner ist } KH \stackrel{=}{<} N$$

$$\text{also } KH(FD + DC) \stackrel{=}{<} \begin{cases} ND(FD + DC) \\ ND \cdot DF + FD \cdot DL \\ (ND + DL)FD \end{cases}$$

$$\text{folglich } KH : 2\alpha D \stackrel{=}{<} \begin{cases} DF : FD + DC \\ DK : KD + DH, \end{cases} \quad \text{weil} \\ IH : HD = YC : CD, \\ \text{wenn } KI = IH,$$

$$\text{also } KH : HD = FC : CD$$

$$\text{folglich } KD : DH = FD : DC$$

$$\text{mithin } KH : 2D\alpha - KH \stackrel{=}{<} KD : DH$$

$$\text{somit } \left. \begin{array}{l} HK : KD \\ CF : FD \\ FD - DC \\ AD - DG : AD \end{array} \right\} \stackrel{=}{<} 2D\alpha - KH : HD$$

$$\text{also } AD : DG \stackrel{=}{<} HD : DK - 2D\alpha$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} AD : DH \\ KD : DB \end{array} \right\} \stackrel{=}{<} GD : DK - 2D\alpha$$

$$\text{mithin } KD^2 - 2KD.D\alpha \stackrel{=}{<} \begin{cases} GD.DB \\ DR.RO \\ R\alpha^2 - \alpha D^2 \end{cases}$$

$$\text{somit } KD^2 - 2KD.D\alpha + \alpha D^2 \stackrel{=}{<} R\alpha^2$$

$$\text{also } KD - D\alpha \stackrel{=}{<} R\alpha$$

$$\text{folglich } KD \stackrel{=}{<} \begin{cases} R\alpha + \alpha D \\ DR \end{cases}$$

Der aus D als Mittelpunkt mit einem Radius = DR beschriebene Kreis erreicht also den Bogen BK in B, oder K, oder einem Punkte T zwischen B, K. Im ersten Fall ist BC, im zweiten HK die gesuchte Linie, wie von selbst erhellet. Im dritten ist

$$\begin{aligned} BD.DG &= DR.RO \\ &= DR(DR - ND - DL) \end{aligned}$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} AD.DB:BD.DG \\ AD:DG \\ ND:DL \end{array} \right\} \begin{aligned} &= VD.DT:DR(DR - ND - DL), \\ &\text{wenn DT den Kreis über AB} \\ &\quad \text{in V schneidet,} \\ &= VD:DR - ND - DL \end{aligned}$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} ND:DL \\ FD:DC \\ WD:DU \end{array} \right\} = VD + DN:RD - DN$$

$$\left. \begin{array}{l} VD + TU:DT - TU \end{array} \right\} \begin{aligned} &\text{wenn } FWD = R, \text{ und DT den} \\ &\text{Kreis über CD in U schneidet,} \\ &\text{weil } WX:XU = FY:YC, \\ &\text{wenn } YXD = R \end{aligned}$$

$$\text{also } \underline{WX=XU}$$

$$\text{folglich } \underline{VW=DU}$$

$$\text{mithin } \underline{VD+DT:DT-TU=VD+DR:RD-DN}$$

$$\text{somit } \underline{DT-TU=RD-DN}$$

$$\text{und } TU = \begin{cases} DN \\ N \end{cases}$$

2) Zwischen den Bogen BH, AK (Fig. 61.).

Analysis.

Es sey TU die gesuchte Linie, welche den über AB liegenden Kreis in V schneide. Macht man AY=YB, VW=TU, DWF=YXD=R, und zieht CU, so ist $\underline{WX:XU=FY:YC}$

$$\text{also } \underline{FY=YC}$$

$$\text{folglich } \underline{AF=BC}$$

mithin ist AF der Lage und Gröfse nach, somit der Punkt F, und die gerade Linie DF gegeben.

$$\text{Ferner ist } FD:DC = WD:DU$$

$$N:P \left\{ \begin{array}{l} = VD-TU:DT+TU, \\ \text{wenn } FD:DC=N:P, \end{array} \right.$$

$$\underline{= VD-N:DT+N}$$

$$\text{also } N:P \left\{ \begin{array}{l} = VD:DT+N+P \\ AD:H \end{array} \right.$$

$$= VD.DT:DT(DT+N+P),$$

$$\underline{AD.DB:BD.H} \left\{ \begin{array}{l} \\ \text{wenn } FD:DC=AD:H, \end{array} \right.$$

$$\text{folglich } \underline{BD.H=DT(DT+N+P)}$$

mithin ist wegen der gegebenen BD, H das Rechteck $DT(DT+N+P)$ gegeben. Da auch $(DT+N+P)-DT=N+P$ gegeben ist, so ist DT (Dat. 85.) der Gröfse und (Dat. 28.) der Lage nach gegeben.

Determination.

Es ist $CD > DU, BD < DT$

$$\text{also } \begin{array}{l} CD - DB \\ BC \end{array} \Bigg\} > \begin{array}{l} UD - DF \\ TU \end{array}$$

folglich muß $N \overset{=}{<} BC$ seyn.

Construction.

Man mache $ADE = ADP = R, ED = DC, PD = DB, AF = BC, DN = N, NL \# AG \# FE, LM \# DN, NM \# DE, ON = NM, DOQ = R, PQ \# DO$, beschreibe über GQ als Durchmesser einen Kreis, welcher die verlängerte OD in R schneide, und aus D als Mittelpunkt mit einem Radius $= DR$ einen anderen. Der Punkt, in welchem derselbe den Bogen BH erreicht, wird die gesuchte Linie bestimmen.

Beweis.

Es ist $BC \overset{=}{>} N$

$$\text{also } \begin{array}{l} (AD + DB)BC \\ AD(CD - DB) + DB \cdot BC \\ FD \cdot DG - BD(AD - BC) \\ (GD - DB)FD \end{array} \Bigg\} \overset{=}{>} \begin{array}{l} ND(AD + DB) \\ ND \cdot DA + ND(DC - CB) \\ ND(AD - BC) + LD \cdot DF \\ (ND + DL)FD \end{array}$$

also $GD - DB \overset{=}{>} 2\alpha D$, wenn $D\alpha = \alpha O$,

folglich $GD \overset{=}{>} BD + 2D\alpha$

$$\text{mithin } \begin{array}{l} BD \cdot DG \\ DR \cdot RO \\ R\alpha^2 - \alpha D^2 \end{array} \Bigg\} \overset{=}{>} BD^2 + 2BD \cdot D\alpha$$

$$\text{somit } R\alpha^2 \geq BD^2 + 2BD.D\alpha + \alpha D^2$$

$$\text{also } R\alpha \geq BD + D\alpha$$

$$\text{folglich } R\alpha - \alpha D \geq BD$$

$$\text{DR} \left\{ \right.$$

$$\text{Ferner ist } HK > HK - 2D\alpha$$

$$\text{also } HK:KD > HK - 2D\alpha : KD$$

$$\left. \begin{array}{l} CF:FD \\ FD-DC \end{array} \right\}$$

$$AD-DG:AD$$

$$\text{weil } FD:DE = AD:DG$$

$$\text{weil } FD:DE = AD:DG$$

$$\text{weil } IH:HD = YC:CD,$$

$$\text{wenn } HI = IK$$

$$\text{also } KH:HD = FC:CD$$

$$\text{folglich } HK:KD = CF:FD$$

$$\text{folglich } AD:DG > KD:HD + 2D\alpha$$

$$\text{mithin } \left. \begin{array}{l} AD:DK \\ HD:DB \end{array} \right\} > GD:HD + 2D\alpha$$

$$\text{somit } HD^2 + 2HD.D\alpha > \begin{cases} BD.DG \\ DR.RO \\ R\alpha^2 - \alpha D^2 \end{cases}$$

$$\text{also } HD^2 + 2HD.D\alpha + \alpha D^2 > R\alpha^2$$

$$\text{folglich } HD + D\alpha > \alpha R$$

$$\text{mithin } HD > \begin{cases} R\alpha - \alpha D \\ DR \end{cases}$$

Der aus D als Mittelpunkt mit einem Radius = DR beschriebene Kreis erreicht also den Bogen BH in B, oder einem Punkte T zwischen B, H. Im ersten Fall ist BC die gesuchte Linie, wie von selbst erhellet. Im zweiten ist

$$\begin{aligned} BD \cdot DG &= DR \cdot RO \\ &= DR(DR + ND + DL) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{also } AD - DB : BD \cdot DG &= VD \cdot DT : DR(DR + ND + DL) \\ AD : DG &= VD : DR + ND + DL \\ ND : DL & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{folglich } ND : DL &= VD - DN : RD + DN \\ FD : DC & \\ WD : DU & \left. \begin{array}{l} \text{wenn } FWD = R, \text{ und } DT \\ \text{den Kreis über } CD \text{ in } U \\ \text{schneidet,} \\ \text{weil } WX : XU = FY : XC, \\ \text{wenn } YXD = R, \end{array} \right\} \\ VD - TU : DT + TU & \end{aligned}$$

$$\text{also } WX = XU$$

$$\text{folglich } VW = TU$$

$$\text{mithin } VD + DT : DT + TU = VD + DR : RD + DN$$

$$\text{somit } DT + TU = RD + DN$$

$$\text{und } TU = \begin{cases} DN \\ N \end{cases}$$

2) Zwischen den Bogen KZ, SH. (Fig. 62.)

Analysis.

Buchstäblich, wie bey N. (Fig. 60.)

Determination.

Wenn man $KI = IH$ macht, und IY, CH, CS zieht,
so ist $IH : HD = YC : CD$

$$= XU : UD = ZS : SD$$

Da $UD < DH, SD < DU$

$$\text{so ist } UX < IH, SZ < XU$$

$$\text{also } \frac{UX+XT}{TU} < \frac{HI+IK}{HK}, \frac{SZ}{TU} < \frac{UX+XT}{TU}$$

folglich muß $N < HK, N > SZ$ seyn.

Construction.

Man mache $ADE=ADP=R$, $ED=DC$, $PD=DB$, $AF=BC$, $DN=N$, $NL \# AG \# FE$, $LM \# DN$, $NM \# DE$, $ON=NM$, $DOQ=R$, $PQ \# DO$, beschreibe über GQ als Durchmesser einen Kreis, welcher die verlängerte DO in R schneide, und aus D als Mittelpunkt mit einem Radius $= DR$ einen anderen. Der Punkt, in welchem derselbe den Bogen KZ erreicht, wird die gesuchte Linie bestimmen.

Beweis.

$$\text{Es ist } HK > N$$

$$\text{also } HK(FD+DC) > \begin{cases} ND(FD+DC) \\ ND.DF+LD.DF \\ 2\alpha D.DF, \text{ wenn } D\alpha = \alpha O, \end{cases}$$

$$\text{folglich } HK:2D\alpha > \begin{cases} DF:FD+DC \\ DK:KD+DH, \end{cases}$$

weil $IH:HD=YC:CD$

wenn $KI=IH$,

$$\text{also } KH:HD=FC:CD$$

$$\text{folglich } KD:DH=FD:DC$$

$$\text{mithin } HK:2D\alpha = HK > KD:DH$$

$$\text{somit } \left. \begin{array}{l} \text{HK:KD} \\ \text{CF:FD} \\ \text{FD-DC} \\ \text{AD-DG:AD} \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \\ > \end{array} 2D\alpha - \text{HK:DH}$$

$$\text{also } \text{AD:DG} \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \text{HD:DK} - 2D\alpha$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} \text{AD:DH} \\ \text{KD:DB} \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \text{GD:DK} - 2D\alpha$$

$$\text{mithin } \text{DK}^2 - \text{KD} \cdot D\alpha \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \begin{cases} \text{BD} \cdot \text{DG} \\ \text{DR} \cdot \text{RO} \\ \text{R}\alpha^2 - \alpha D^2 \end{cases}$$

$$\text{somit } \text{DK}^2 - 2\text{KD} \cdot D\alpha + \alpha D^2 \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \text{R}\alpha^2$$

$$\text{also } \text{KD} - D\alpha \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \text{R}\alpha$$

$$\text{folglich } \text{KD} \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \begin{cases} \text{R}\alpha + \alpha D \\ \text{DR} \end{cases}$$

$$\text{Ferner ist } \text{SZ} \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \text{N (Det.)}$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} \text{SZ:ZD} \\ \text{CY:YD} \\ 2\text{CY:2YD} \\ \text{FD-DC:FD+DC} \\ \text{AD-DG:AD+DG} \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \text{ND:DZ}$$

$$\text{Da } \text{AD:DG} = \text{ND:DL}$$

$$\text{so ist } \text{AD+DG:AD} = \text{ND+DL:ND}$$

$$\text{also } AD - DG : AD \stackrel{=}{<} 2D\alpha : DZ$$

$$\text{folglich } AD : DG \stackrel{=}{<} DZ : ZD - 2D\alpha$$

$$\text{mithin } \left. \begin{array}{l} AD : DZ \\ ZD : DB \end{array} \right\} \stackrel{=}{<} DG : ZD - 2D\alpha$$

$$\text{somit } DZ^2 - 2ZD \cdot D\alpha \stackrel{=}{<} \left\{ \begin{array}{l} BD \cdot DG \\ DR \cdot RO \end{array} \right.$$

$$\text{also } DZ^2 - 2ZD \cdot D\alpha + \alpha D^2 \stackrel{=}{<} R\alpha^2$$

$$\text{folglich } ZD - D\alpha \stackrel{=}{<} R\alpha$$

$$\text{mithin } DZ \stackrel{=}{<} \left\{ \begin{array}{l} R\alpha + \alpha D \\ DR \end{array} \right.$$

Der aus D als Mittelpunkt mit einem Radius = DR beschriebene Kreis erreicht also den Bogen KZ in K, oder Z, oder in einem Punkte T zwischen K, Z. Im ersten Fall ist HK, im zweiten SZ die gesuchte Linie, wie von selbst erhellet. Im dritten ist $BD \cdot DG = DR \cdot RO$

also $TU = N$, buchstäblich, wie bey $\aleph$. (Fig. 60.)

7) Zwischen die Bogen SH, HZ (Fig. 63.).

Analysis.

Buchstäblich, wie bey $\aleph$. (Fig. 60.)

Determination.

Es ist $ZD > DT, SD < DU$

$$\text{also } \frac{ZD-DS}{SZ} > \frac{TD-DU}{TU}$$

folglich muß $N \overset{=}{<} SZ$ seyn.

Construction.

Buchstäblich, wie bey N. (Fig. 60.)

Beweis.

$$\text{Es ist } SZ \overset{=}{>} N$$

$$\text{also } SZ:ZD \overset{=}{>} ND:DZ$$

folglich $DZ \overset{=}{>} DR$, wie bey J. (Fig. 62.)

Ferner ist $HK < HK + 2D\alpha$

$$\text{also } HK:KD < HK + 2D\alpha:KD$$

folglich $HD < DR$, wie bey J. (Fig. 61.)

Der aus D als Mittelpunkt mit einem Radius $= DR$ beschriebene Kreis erreicht also den Bogen HZ in Z, oder in einem Punkte T zwischen H, Z. Im ersten Fall ist SZ die gesuchte Linie, wie von selbst erhellet. Im zweiten ist $DR \cdot RO = BD \cdot DG$

$$\text{also } TU = N, \text{ wie bey}$$

N. (Fig. 60.)

γ) Zwischen den Mittelpunkt des anderen Kreises und denjenigen Endpunkt seines Durchmessers, welcher von dem Punkte D am meisten entfernt ist (Fig. 64—67.). Die gesuchte Linie soll, wenn die den Durchschnitt H beider Kreise mit D verbindende gerade Linie DH den über

AB liegenden Kreis in K (Fig. 64. 65.), und die diesen Kreis in Z berührende gerade Linie DZ den über CD liegenden in S schneidet (Fig. 66. 67.), liegen

α) zwischen den Bogen BH, HC. (Fig. 46.)

Analysis.

Buchstäblich, wie zu β. α. (Fig. 60.)

Determination.

Wenn man $BSD = R$ macht, so ist $SU:UD = BC:CD$ (El. VI. 2.).

Da $UD < DC$

so ist $SU < BC$

Zieht man die gerade Linie TA, so ist $BTA = R$

also ist $BTD > R$

folglich $BTS < R$

mithin $SU > UT$

somit $BC > TU$

also muß $N < BC$ seyn.

Construction.

Man mache $ADE = ADP = R$, $ED = DC$, $PD = DB$, $AF = BC$, $DN = N$, $NL \# AG \# FE$, $LM \# DN$, $NM \# DE$, $ON = NM$, $DOQ = R$, $PQ \# DO$, beschreibe über GQ als Durchmesser einen Kreis, welcher die verlängerte DO in R schneide, und aus D als Mittelpunkt mit einem Radius $= DR$ einen anderen. Der Punkt, in welchem derselbe den Bogen BH erreicht, wird die gesuchte Linie bestimmen.

Beweis.

Es ist $BC \stackrel{=}{>} N$ (Det.)

also $BD \stackrel{=}{>} DR$, wie bey β . N. (Fig. 60.)

Ferner ist $HK > HK - 2D\alpha$

also $HK:KD \left\{ \begin{array}{l} > HK - 2D\alpha:KD \\ CF \left\{ : FD \right. \\ CD - DF \left\{ \right. \\ GD - DA : AD \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{weil } IH:HD = YC:CD, \\ \text{wenn } HI = IK, \\ \text{also } KH:HD = FC:CD \end{array} \right.$

folglich $HK:KD = CF:FD$

folglich $AI:DG < KD:HD - 2D\alpha$

mithin $AD:DK \left\{ \begin{array}{l} < GD:DH - 2D\alpha \\ HD:DB \end{array} \right.$

somit $DH^2 - 2BD.D\alpha < BD.DG$

also $DH^2 - 2BD.D\alpha + \alpha D^2 < \left\{ \begin{array}{l} BD.DG \\ DR.RO \end{array} \right\} + D\alpha^2$
 $R\alpha^2$

folglich $HD - D\alpha < R\alpha$

mithin $DH < \left\{ \begin{array}{l} R\alpha + \alpha D \\ DR \end{array} \right.$

Der aus D als Mittelpunkt mit einem Radius = DR beschriebene Kreis erreicht also den Bogen BH in B, oder in einem Punkte T zwischen B, H. Im ersten Fall ist BC die gesuchte Linie, wie leicht erhellet. Im zweiten ist $BD.DG = DR.RO$

also $TU = N$, wie bey β . N. (Fig. 60.)

2) Zwischen den Bogen BK, HC. (Fig. 65.)

Analysis.

Buchstäblich, wie bey β . 2. (Fig. 61.)

Determination.

Es ist $CD > DU$, $BD < DT$, und $UD > DH$, $TD < DK$

$$\text{also } \underbrace{CD - DB}_{BC} \left\{ \begin{array}{l} > \\ > \end{array} \right\} \underbrace{UD - DT}_{TU}, \text{ also } \underbrace{UD - DT}_{TU} \left\{ \begin{array}{l} > \\ > \end{array} \right\} \underbrace{HD - DK}_{HK}$$

folglich muß $N \overset{=}{<} BC$, $N \overset{=}{>} HK$ seyn.

Construction.

Man mache $ADE = ADP = R$, $ED = DC$, $PD = DB$, $AF = BC$, $DN = N$, $NL \# AG \# FE$, $LM \# DN$, $NM \# DE$, $ON = NM$, $DOQ = R$, $PQ \# DO$, beschreibe über GQ als Durchmesser einen Kreis, welcher die verlängerte OD in R schneide, und aus D als Mittelpunkt mit einem Radius $= DR$ einen anderen. Der Punkt, in welchem derselbe den Bogen BK erreicht, wird die gesuchte Linie bestimmen.

Beweis.

$$\text{Es ist } BC \overset{=}{>} N$$

$$\text{also } DR \overset{=}{>} DB, \text{ wie bey } \beta. 2. \text{ (Fig. 61.)}$$

$$\text{Ferner ist } KH \overset{=}{<} N$$

$$\text{also } KH(FD + DC) \overset{=}{<} \begin{cases} ND(FD + DC) \\ ND \cdot DF + LD \cdot DF \\ (ND + DL)DF \end{cases}$$

$$\text{folglich } HK:2D\alpha \begin{cases} = DF:FD+DC, \text{ wenn } D\alpha = \alpha O, \\ < DK:KD+DH, \end{cases}$$

$$\text{weil } IH:HD = YC:CD, \\ \text{wenn } KI = IH,$$

$$\text{also } KH:HD = FC:CD$$

$$\text{folglich } KD:DH = FD:DC$$

$$\text{mithin } HK:2D\alpha - KH \begin{cases} = KD:DH \\ < \end{cases}$$

$$\text{somit } \left. \begin{array}{l} HK:KD \\ CF:FD \\ CD-DF \\ GD-DA:AD \end{array} \right\} \begin{cases} = 2D\alpha - KH:HD \\ < \end{cases}$$

$$\text{also } AD:DG \begin{cases} = HD:DK + 2D\alpha \\ > \end{cases}$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} AD:DH \\ KD:DB \end{array} \right\} \begin{cases} = GD:DK + 2D\alpha \\ > \end{cases}$$

$$\text{mithin } DK^2 + 2KD.D\alpha \begin{cases} = GD.DB \\ > DR.RO \end{cases}$$

$$\text{somit } DK^2 + 2KD.D\alpha + \alpha D^2 \begin{cases} = R\alpha^2 \\ > \end{cases}$$

$$\text{also } KD + D\alpha \begin{cases} = R\alpha \\ > \end{cases}$$

$$\text{folglich } KD \begin{cases} = R\alpha - \alpha D \\ > DR \end{cases}$$

Der aus D als Mittelpunkt mit einem Radius
= DR beschriebene Kreis erreicht also den Bogen

Ferner ist $SZ \stackrel{=}{<} N$

$$\left. \begin{array}{l} \text{also } SZ:ZD \\ CY:YD \\ 2CY:2YD \\ CD-DF:CD+DF \\ GD-DA:GD+DA \end{array} \right\} \stackrel{=}{<} ND:DZ$$

Es ist $AD:DG \stackrel{=}{=} ND : DL$

folglich $GD+DA:AD \stackrel{=}{=} ND+DL : ND$

mithin $GD-DA:AD \stackrel{=}{<} 2D\alpha : DZ$

somit $AD:DG \stackrel{=}{>} DZ : DZ+2D\alpha$

also $\left. \begin{array}{l} AD:DZ \\ ZD:DB \end{array} \right\} \stackrel{=}{>} GD : DZ+2D\alpha$

folglich $DZ^2+2ZD.D\alpha \stackrel{=}{>} \left\{ \begin{array}{l} BD.DG \\ DR.RO \end{array} \right.$

mithin $DZ^2+2ZD.D\alpha+\alpha D^2 \stackrel{=}{>} R\alpha^2$

somit $ZD+D\alpha \stackrel{=}{>} R\alpha$

und $DZ \stackrel{=}{>} \left\{ \begin{array}{l} R\alpha-\alpha D \\ DR \end{array} \right.$

Der aus D als Mittelpunkt mit einem Radius = DR beschriebene Kreis erreicht also den Bogen KZ in K, oder Z, oder in einem Punkte T zwischen

zwischen K,Z. Im ersten Fall ist KH, im zweiten SZ die gesuchte Linie, wie leicht erhellet. Im dritten ist $BD.DG=DR.RO$

also $TU=N$, wie bey β . 2. (Fig. 61.)

7) Zwischen den Bogen SH,HZ. (Fig. 67.)

Analysis.

Buchstäblich, wie bey β . 2. (Fig. 61.)

Determination.

Wenn $C\beta=\beta D$, so ist $CY<C\beta$

also $UY<YS$

folglich $UY^2 \} < \{ YS^2$
 $TU.UV+YZ^2 \} \{ SZ^2+ZY^2$

mithin $TU.UV < SZ^2$

somit $TU:SZ < SZ:UV$

Es ist $UD>DS$, $VD\leq DZ$

also $UD-DV \} > \{ SD-DZ$
 $UV \} \{ SZ$

folglich $TU < SZ$

mithin muß $N \leq SZ$ seyn.

Construction.

Man mache $ADE=ADP=R$, $ED=DC$, $PD=DB$, $AF=BC$, $DN=N$, $NL\#AG\#FE$, $LM\#DN$, $NM\#DE$, $ON=NM$, $DOQ=R$, $PQ\#DO$, beschreibe über GQ als Durchmesser einen Kreis, welcher die verlängerte OD in R schneide, und aus D als Mittelpunkt mit

einem Radius $= DR$ einen anderen. Der Punkt, in welchem derselbe den Bogen HZ erreicht, wird die gesuchte Linie bestimmen.

Beweis.

Es ist $SZ > N$

also $DZ < DR$, wie bey γ . 1. (Fig. 66.)

Ferner ist $HK < HK + 2D\alpha$

also $HD > DR$, wie bey β . 2. (Fig. 61.)

Der aus D mit einem Radius $= DR$ beschriebene Kreis erreicht also den Bogen HZ in Z , oder in einem Punkte H zwischen H, Z . Im ersten Fall ist SZ die gesuchte Linie. Im zweiten ist

$$DR \cdot RO = BD \cdot DG$$

also $TU = N$, wie bey β . 2. (Fig. 61.)

b) Die gesuchte Linie soll gezogen werden von einem der inneren Endpunkte, D , der Durchmesser (Fig. 68—75.). Der Punkt D liegt

α) in dem Mittelpunkte des über AB beschriebenen Kreises (Fig. 68—71.). Die gesuchte Linie soll, wenn DH den Punkt D mit dem Durchschnitt H beider Kreise verknüpft, und das in D auf AD errichtete Perpendikel den über AB beschriebenen Kreis in Z, S schneidet,

$\aleph$) zwischen den Bogen AH, HC (Fig. 68.).

$\beth$) — — — — AK, HC (Fig. 69.).

$\daleth$) — — — — ZH, HD (Fig. 70.).

$\gtrless$) — — — — ZH, KS (Fig. 71.).

Diese Fälle erledigen sich von selbst, indem in sämtlichen DU gegeben ist, nämlich

in Fig. 68. ist $DU = DT + TU = DA + N$.

— 69. — — $= TU - DT = N - DA$.

— 70. — — $= DT - TU = DA - N$.

— 71. — — $= TU - DT = N - DA$.

β) Zwischen dem Mittelpunkte desselben, und dem ausserhalb des Kreises über DC liegenden Endpunkte seines Durchmessers (Fig. 72—75.). Die gesuchte Linie soll, wenn die den Punkt D mit dem Durchschnitte H beider Kreise verbindende gerade Linie den über AB liegenden Kreis in K, und das in D auf AD errichtete Perpendikel denselben Kreis in Z schneidet, liegen

α) zwischen den Bogen CH, HB. (Fig. 72.)

Analysis.

Es sey TU die gesuchte Linie, welche den über AB liegenden Kreis in V schneide. Macht man $AY = YB$, $VW = TU$, $DWF = YXD = R$, und zieht CU, so ist $WX : XU = FY : YC$

also $FY = YC$

folglich $AF = BC$

mithin ist AF der Lage und Gröfse nach, somit der Punkt F, und die gerade Linie DF gegeben.

Ferner ist $FD : DC = WD : DU$

wenn $FD : DC = N : P$, $N : P = VD + TU : DT + TU$
 $= VD + N : DT + N$

$$\begin{aligned} & \text{also } N:P \left\{ \begin{aligned} &= VI:DT-(P-N) \\ &= VD.DT:DT(DT-(P-N)) \\ &BD.DA:AD.H \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

folglich ist $BD.H = DT(DT-(P-N))$
mithin ist wegen der gegebenen BD, H das Rechteck $DT(DT-(P-N))$ der Gröſſe nach gegeben.

Da auch $DT-(DT-(P-N)) = P-N$ gegeben ist, so ist DT (Dat. 85.) der Gröſſe und (Dat. 28.) der Lage nach gegeben.

Determination.

Es ist $BTA = R$

also $BTD < R$

folglich $SU > UT$, wenn $BST = R$,

Da $DU:US = DC:CB$, $UD < DC$,

so ist $US < CB$

mithin $CB > UT$

also muß $N < BC$ seyn.

Construction.

Man mache $ADE = ADP = R$, $ED = DC$, $PD = DB$, $AF = BC$, $DN = N$, $NL \# AG \# FE$, $LM \# DN$, $NM \# DE$, $ON - NM$, welche $ON > DN$, weil $FD < DC$, nehme $DOQ = R$, $PQ \# DO$, beschreibe über GQ als Durchmesser einen Kreis, welcher die verlängerte DO in R schneide, und aus D als Mittelpunkt mit einem Radius $= DR$ einen anderen. Der Punkt, in welchem derselbe den Bogen BH erreicht, wird die gesuchte Linie bestimmen.

Beweis.

Es ist $N \stackrel{=}{<} BC$

$$\begin{array}{l} \text{also } ND(BD-DA) \\ ND(DC-CB)-ND.DA \\ LD.DF-ND(AD+BC) \\ (LD-DN)(AD+BC) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \stackrel{=}{<} \\ \stackrel{=}{<} \\ \stackrel{=}{<} \\ \stackrel{=}{<} \end{array} \right. \begin{array}{l} CB(BD-DA) \\ CB.BD-(CD-DB)DA \\ (AD+BC)BD-FD.DG \\ (AD+BC)(BD-DG) \end{array}$$

also $2D\alpha \stackrel{=}{<} BD-DG$, wenn $D\alpha = \alpha O$,

$$\text{folglich } 2BD.D\alpha \stackrel{=}{<} BD^2 - \begin{cases} BD.DG \\ DR.RO \\ R\alpha^2 - \alpha D^2 \end{cases}$$

mithin $R\alpha^2 \stackrel{=}{<} BD^2 - 2BD.D\alpha + \alpha D^2$ somit $R\alpha \stackrel{=}{<} BD - D\alpha$

$$\text{und } \begin{array}{l} R\alpha + \alpha D \\ DR \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \stackrel{=}{<} \\ \stackrel{=}{<} \end{array} \right. BD$$

Ferner ist $KH > KH - 2D\alpha$

$$\begin{array}{l} \text{also } HK:KD \\ CF \\ CD+DF \\ GD+DA : AD \end{array} \left\{ \begin{array}{l} > HK - 2D\alpha : KD \\ > HK - 2D\alpha : KD \\ > HK - 2D\alpha : KD \\ > HK - 2D\alpha : KD \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{weil } IH:HD = YC:CD, \\ \text{wenn } HI = K, \\ \text{also } KH:HD = FC:CD \end{array}$$

folglich $HK:KD = CF:FD$ folglich $AD:DG < KD:DH - 2D\alpha$

$$\text{mithin } \left. \begin{array}{l} AD:DK \\ HD:DB \end{array} \right\} < GD:DH - 2D\alpha$$

$$\text{somit } HD^2 - 2HD.D\alpha < \begin{cases} BD.DG \\ R\alpha^2 - \alpha D^2 \end{cases}$$

$$\text{also } HD^2 - 2HD.D\alpha + \alpha D^2 < R\alpha^2$$

$$\text{folglich } HD - D\alpha < R\alpha$$

$$\text{mithin } HD < \begin{cases} R\alpha + \alpha D \\ DR \end{cases}$$

Der aus D als Mittelpunkt mit einem Radius $= DR$ beschriebene Kreis erreicht also den Bogen BH in B, oder in einem Punkte T zwischen B, H. Im ersten Fall ist BC die gesuchte Linie, wie leicht erhellet. Im zweiten ist

$$\begin{aligned} BD.DG &= DR.RO \\ &= DR(DR - (LD - DN)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{also } \left. \begin{array}{l} AD.DB:BD.DG \\ AD:DG \\ ND:DL \end{array} \right\} &= VD.DT:DR(DR - (LD - DN)) \\ &\text{wenn DT den Kreis über} \\ &\text{AB in V schneidet,} \\ &= VD:DR - (LD - DN) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{folglich } \left. \begin{array}{l} ND:DL \\ FD:DC \\ WD:DU \end{array} \right\} &= VD + ND:RD + DN \\ &\text{wenn } FWD = R, \text{ und DT} \\ &\text{den Kreis über CD in U} \\ &\text{schneidet,} \\ VD + TU:DT + TU &\text{weil } WX:XU = FY:YC, \\ &\text{wenn } YXD = R, \end{aligned}$$

$$\text{also } WX = XU$$

$$\text{folglich } VW = TU$$

mithin $TD - DV : DT + TU = RD - DV : RD + DN$

$$\text{somit } DT + TU = RD + DN$$

$$\text{und } TU = N$$

2) Zwischen den Bogen CH, BK (Fig. 73.).

Analysis.

Es sey TU die gesuchte Linie, welche den über AB liegenden Kreis in V schneide. Macht man $AY = YB$, $VW = TU$, $DWF = YXD = R$ und zieht CU, so ist $WX : XU = FY : YC$

$$\text{also } FY = YC$$

$$\text{folglich } AF = BC$$

mithin ist AF der Lage und Gröfse nach, somit der Punkt F, und die gerade Linie DF gegeben.

$$\text{Ferner ist } FD : DC = WD : DU$$

$$\text{wenn } FD : DC = N : P, N : P = TU - VD : TU - DT \\ = N - DV : N - DT$$

$$\text{also } N : P = VD : DT + P - N \\ \text{wenn } FD : DC = AD : H, AD : H = VD : DT + P - N \\ AD : DB : BD : H$$

$$\text{folglich } DT, H = DT(DT + P - N)$$

mithin ist wegen der gegebenen BD, H das Rechteck $DT(DT + P - N)$ der Gröfse nach gegeben. Da auch $(DT + P - N) - DT = P - N$ gegeben ist, so ist DT (Dat. 85.) der Gröfse und (Dat. 28.) der Lage nach gegeben.

Determination.

Es ist $CY : YD = UX : XD$, und $IH : HD = YC : CD$, wenn $HI = IK$,
 $= XU : UD$

$$\begin{array}{ll}
 \text{Da } \underline{YD > DX} & \text{Da } \underline{HD < DU} \\
 \text{so ist } \underline{CY > UX} & \text{so ist } \underline{IH < XU} \\
 \text{Weil auch } \underline{AB > VT} & \text{Weil } \underline{YX < YI} \\
 \text{also } \underline{YB > TX} & \text{so ist } \underline{TX > IK} \\
 \text{so ist } \left. \begin{array}{l} CY + YB \\ BC \end{array} \right\} > \left\{ \begin{array}{l} TX + XU \\ TU \end{array} \right. & \text{also } \left. \begin{array}{l} HI + IK \\ HK \end{array} \right\} < \left\{ \begin{array}{l} UX + XT \\ TU \end{array} \right.
 \end{array}$$

folglich muß $N \overset{=}{<} BC, N \overset{=}{>} HK$ seyn.

Construction.

Man mache $ADE = ADG = R, ED = DC, PD = DB, AF = BC, DN = N, NL \# AG \# FE, LM \# DN, NM \# DE, ON = NM$, welche $ON > ND$, weil $FD < DC$, nehme $DOQ = R, PQD \# O$, beschreibe über GQ als Durchmesser einen Kreis, welcher die verlängerte OD in R schneide, und aus D als Mittelpunkt mit einem Radius $= DR$ einen anderen. Der Punkt, in welchem derselbe den Bogen BH erreicht, wird die gesuchte Linie bestimmen.

Beweis.

Es ist $BC \overset{=}{>} N$ (Det.)

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} (AD - DB)BC \\ AD(CD + DB) - DB \cdot BC \\ GD \cdot DF - DB(BC - AD) \\ (GD - DB)(BC - AD) \end{array} \right\} \overset{=}{>} \left\{ \begin{array}{l} ND(AD - DB) \\ ND \cdot DA - ND(BC - CD) \\ LD \cdot DF - ND(BC - AD) \\ (LD - DN)(BC - AD) \end{array} \right.$$

folglich $GD - DB \overset{=}{>} 2D\alpha$, wenn $D\alpha = \alpha O$,

$$\text{mithin } GD \cdot DB - BD^2 \stackrel{=}{>} 2BD \cdot D\alpha$$

$$\text{somit } \left. \begin{array}{l} GD \cdot DB \\ DR \cdot RO \\ R\alpha^2 - \alpha D^2 \end{array} \right\} \stackrel{=}{>} BD^2 + 2BD \cdot D\alpha$$

$$\text{also } R\alpha \stackrel{=}{>} BD^2 + 2BD \cdot D\alpha + \alpha D^2$$

$$\text{folglich } R\alpha \stackrel{=}{>} BD + D\alpha$$

$$\text{mithin } \left. \begin{array}{l} R\alpha - \alpha D \\ DR \end{array} \right\} \stackrel{=}{>} DB$$

$$\text{Ferner ist } HK \stackrel{=}{<} N$$

$$\text{also } HK(CD - DF) \stackrel{=}{<} \left\{ \begin{array}{l} ND(CD - DF) \\ FD \cdot DL - ND \cdot DF \\ 2FD \cdot D\alpha \end{array} \right.$$

$$\text{folglich } HK:2D\alpha \stackrel{=}{<} \left\{ \begin{array}{l} DF:CD - DF \\ KD:HD - DK, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{weil} \\ IH:HD = YC:CD, \\ \text{wenn } HI = IK, \end{array}$$

$$\text{also } KH:HD = FC:CD$$

$$\text{folglich } KD:DH = FD:DC$$

$$\text{mithin } HK:2D\alpha + HK \stackrel{=}{<} KD:DH$$

$$\begin{array}{l} \text{somit } HK:KD \\ \text{(El. VI. 2.) } CF \\ CD + DF \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{somit } HK:KD \\ \text{(El. VI. 2.) } CF \\ CD + DF \end{array}} \right\} \stackrel{=}{<} 2D\alpha + HK:DH$$

$$\begin{array}{l} GD + DA:AD \end{array} \quad \text{(El. VI. 2. V. 18.)}$$

$$\text{also } AD:DG \stackrel{=}{>} DH:2\alpha D + DK$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} AD:DH \\ KD:DB \end{array} \right\} \stackrel{=}{>} DG:2\alpha D + DK$$

$$\text{mithin } KD^2 + 2\alpha D \cdot DB \stackrel{=}{>} \left. \begin{array}{l} BD \cdot DG \\ R\alpha^2 - \alpha D^2 \end{array} \right\}$$

$$\text{somit } KD^2 + 2\alpha D \cdot DB + D\alpha^2 \stackrel{=}{>} R\alpha^2$$

$$\text{also } KD + D\alpha \stackrel{=}{>} \alpha R$$

$$\text{folglich } KD \stackrel{=}{>} \left\{ \begin{array}{l} R\alpha - \alpha D \\ DR \end{array} \right.$$

Der aus D als Mittelpunkt mit einem Radius = DR beschriebene Kreis erreicht mithin den Bogen DK in B, oder K, oder in einem Punkte T zwischen B, K. Im ersten Fall ist BC, im zweiten HK die gesuchte Linie, wie von selbst erhellet. Im dritten ist

$$\begin{aligned} BD \cdot DG &= DR \cdot RO \\ &= DR(DR + LD - DN) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{also } \left. \begin{array}{l} AD \cdot DB : BD \cdot DG \\ AD : DG \\ ND : DL \end{array} \right\} &= VD \cdot DT : DR(DR + LD - DN) \\ &\quad \text{wenn DT den Kreis über} \\ &\quad \text{AB in V schneidet,} \\ &= VD : DR + LD - DN \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{folglich } \left. \begin{array}{l} ND : DL \\ FD : DC \\ WD : DU \\ TU - DV : TU - DT \end{array} \right\} &= ND - DV : ND - DR \\ &\quad \text{wenn FWD = R, und DT} \\ &\quad \text{den Kreis über CD in U} \\ &\quad \text{schneidet,} \\ &\quad \text{weil WX:XU = FY:YC,} \\ &\quad \text{wenn YXD = R,} \end{aligned}$$

$$\text{also } \overline{WX=XU}$$

$$\text{folglich } \overline{VW=TU}$$

$$\text{mithin } \overline{VD-DT:TU-DT=VR-DR:ND-DR}$$

$$\text{somit } \overline{TU-DT=ND-DR}$$

$$\text{und } TU = \begin{cases} ND \\ N \end{cases}$$

1) Zwischen den Bogen DH, HZ. (Fig. 74.)

Analysis.

Es sey TU die gesuchte Linie, welche den über AB liegenden Kreis in V schneide. Macht man AY = YB, VW = TU, DWF = YXD = R, und zieht CU, so ist WX : XU = FY : YC

$$\text{also } \overline{FY=YC}$$

$$\text{folglich } \overline{AF=BC}$$

mithin ist AF der Lage und Gröfse nach, somit der Punkt F, und die gerade Linie DF gegeben.

$$\text{Ferner ist } FD:DC \} = WD:DU$$

$$\text{wenn } FD:DC = N:P, N:P \} = VD-TU:DT-TU, \\ = VD-N:DT-N$$

$$\text{also } N:P \} = VD:DT+P-N$$

$$\text{für } FD:DC = AD:H, AD:H \} = VD.DT:DT(DT+P-N) \\ AD.DB:BD.H \}$$

$$\text{folglich } \overline{BD.H=DT(DT+P-N)}$$

mithin ist wegen der gegebenen BD, H das Rechteck DT(DT+P-N) der Gröfse nach gegeben. Da auch (DT+P-N)-DT = P-N gegeben ist, so ist DT

(Dat. 85.) der Gröſſe und (Dat. 28.) der Lage nach gegeben.

Determination.

Es ist $DC > DB$ (hyp.)

$$\text{also } \frac{\frac{1}{2}DC}{D\beta} > \frac{\frac{1}{2}DB}{D\beta}$$

Da auch $\frac{1}{2}DB > DY$ (hyp.)

$$\text{so ist } D\beta > DY$$

$$\text{folglich } \beta Z > \beta T$$

$$\text{mithin } \frac{\beta Z^2}{\beta D^2 + DZ^2} > \frac{\beta T^2}{DT \cdot TU + \beta D^2}$$

$$\text{somit } DZ^2 > DT \cdot TU$$

$$\text{also } TD:DZ < ZD:TU$$

Es ist aber $TD > DZ$

$$\text{folglich } ZD > TU$$

mithin muſs $N \stackrel{=}{<} DZ$ ſeyn.

Construction.

Man mache $ADE = ADP = R$, $ED = DC$, $PD = DB$, $AF = BC$, $DN = N$, $NL \# AG \# FE$, $LM \# DN$, $NM \# DE$, $ON = NM$, welche $ON > NM$, weil $FD < DC$, nehme $DOQ = R$, $PQ \# DO$, beſchreibe über GQ als Durchmesser einen Kreis, welcher die verlängerte VD in R ſchneide, und aus D als Mittelpunkt mit einem Radius $= DR$ einen anderen. Der Punkt, in welchem

derselbe den Bogen HZ erreicht, wird die gesuchte Linie bestimmen.

Beweis.

$$\text{Es ist } DZ \stackrel{=}{>} N \text{ (Det.)}$$

$$\text{also } DZ^2 \stackrel{=}{>} \frac{DN \cdot DZ}{AD \cdot DB}$$

$$\text{folglich } BD:DZ \stackrel{=}{>} \left\{ \begin{array}{l} ND:DA \\ ND(GD-DA) \\ AD \cdot DL - ND \cdot DA \\ 2AD \cdot D\alpha \\ 2D\alpha:GD-DA \end{array} \right\} \begin{array}{l} : \\ : \\ : \\ \text{wenn } D\alpha = \alpha O, \\ \end{array} \frac{(GD-DA)AD}{2D\alpha:GD-DA}$$

$$\text{mithin } BD \cdot DG - BD \cdot DA \stackrel{=}{>} 2\alpha D \cdot DZ$$

$$\text{somit } \left. \begin{array}{l} BD \cdot DG \\ DR \cdot RO \\ R\alpha^2 - \alpha D^2 \end{array} \right\} \stackrel{=}{>} DZ^2 + 2\alpha D \cdot DZ$$

$$\text{also } R\alpha^2 \stackrel{=}{>} DZ^2 + 2\alpha D \cdot DZ + D\alpha^2$$

$$\text{folglich } R\alpha \stackrel{=}{>} ZD + D\alpha$$

$$\text{mithin } \left. \begin{array}{l} R\alpha - D\alpha \\ DR \end{array} \right\} \stackrel{=}{>} DZ$$

Ferner ist $KH < KH + 2D\alpha$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} HK:KD \\ CF:FD \\ CD+DF \end{array} \right\} < KH + 2D\alpha:KD \quad \begin{array}{l} \text{weil } IH:HD = YC:CD, \\ \text{wenn } HI = IK, \end{array}$$

(El. VI, 2. V. 18.) $GD+DA:AD$ also $KH:HD = FC:CD$

folglich $HK:KD = CF:FD$

folglich $AD:DG > KD:DH + 2D\alpha$

mithin $\left. \begin{array}{l} AD:DK \\ HD:DB \end{array} \right\} > GD:DH + 2D\alpha$

somit $DH^2 + 2HD.D\alpha > \begin{cases} BD.DG \\ R\alpha^2 - \alpha D^2 \end{cases}$

also $DH^2 + 2HD.D\alpha + \alpha D^2 > R\alpha^2$

folglich $HD + D\alpha > R\alpha$

mithin $HD > \begin{cases} R\alpha - \alpha D \\ DR \end{cases}$

Der aus D als Mittelpunkt mit einem Radius = DR beschriebene Kreis erreicht also den Bogen HZ in Z, oder einem Punkte T zwischen H, Z. Im ersten Fall ist DZ die gesuchte Linie, wie von selbst erhellet. Im zweiten ist

$$\begin{aligned} BD.DG &= DR.RO \\ &= DR(DR + LD - DN) \end{aligned}$$

also $\left. \begin{array}{l} AD.DB:BD.DG \\ AD:DG \\ ND:DL \end{array} \right\} = \begin{array}{l} VD.DT:DR(DR + LD - DN) \\ VD:DR + LD - DN \end{array}$

folglich $ND:DL = VD - DN:RD = DN$

$\left. \begin{array}{l} FD:DC \\ WD:DU \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{wenn } FWD = DR, \text{ und } DT \\ \text{den Kreis über } CD \text{ in } U \\ \text{schneidet,} \end{array}$

$VD - TU:DT - TU$ weil $WX:XU = FY:YC$,
wenn $YXD = R$,

also $WX = XU$

folglich $VW = TU$

mithin $TD - DV : DT - TU = RD - DV : RD - DN$

somit $DT - TU = RD - DN$

und $TU = \begin{cases} DN \\ N \end{cases}$

7) Zwischen den Bogen DH, ZK. (Fig. 75.)

Analysis.

Buchstäblich, wie bey 2. (Fig. 73.)

Determination.

Es ist $CD > DA$ (hyp.)

also $\frac{1}{2}CD \} > \frac{1}{2}DA$
 $D\beta \}$

Da auch $\frac{1}{2}DA > DY$

so ist $\beta D > DY$

folglich $\beta Z < \beta T$

mithin $\beta Z^2 \} < \beta T^2$
 $\beta D^2 + DZ^2 \} DT \cdot TU + \beta D^2$

somit $DZ^2 < DT \cdot TU$

also $TD : DZ > ZD : TU$

Es ist aber $TD < DZ$

folglich $ZD < TU$

Auch ist $IH : HD = YC : CD$,

wenn $HI = IK$,

$= XU : UD$

Da $HD > DU$

so ist $IH > XU$

Nun ist $YX > YI$

also $KI > TX$

folglich $\frac{KI+IH}{KH} > \frac{TX+XU}{TU}$

mithin muß $N \bar{>} DZ$, $N \bar{<} KH$ seyn.

Construction.

Man mache $ADE = ADG = R$, $ED = DC$, $PD = DB$, $AF = BC$, $DN = N$, $NL \# AG \# FE$, $LM \# DN$, $NM \# DE$, $ON = NM$, welche $ON > NM$ wegen $FD < DC$, nehme $DOQ = R$, $PQ \# DO$, beschreibe über GQ als Durchmesser einen Kreis, welcher die verlängerte OD in R schneide, und aus D als Mittelpunkt mit einem Radius $= DR$ einen anderen. Der Punkt, in welchem derselbe den Bogen KZ erreicht, wird die gesuchte Linie bestimmen.

Beweis.

Es ist $DZ \bar{<} N$

also $DZ^2 \bar{<} ND \cdot DZ$
 $AD \cdot DB$

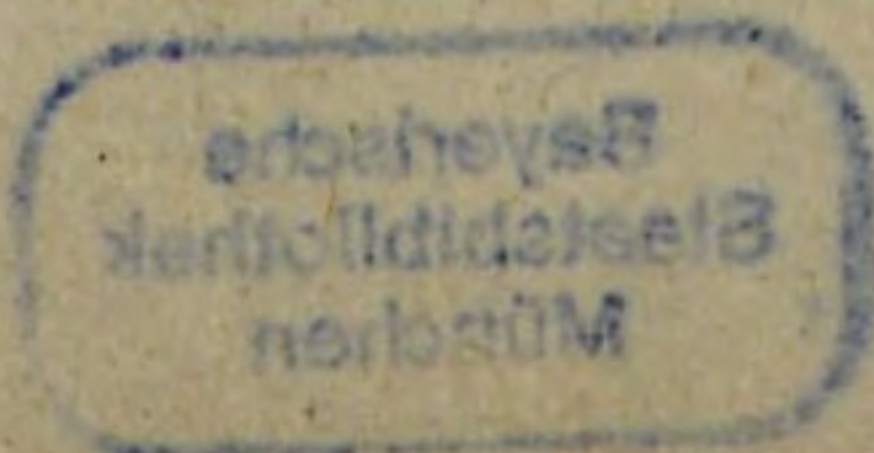
folglich $BD:DZ \bar{<} ND:DA$

mithin $DR \bar{<} DZ$, wie bey 1. (Fig. 74.)

Ferner ist $HK \bar{>} N$

also $HK(CD-DF) \bar{>} ND(CD-DF)$

folglich $DK \bar{<} DR$, wie bey 2. (Fig. 73.)



Der aus D als Mittelpunkt mit einem Radius $= DR$ beschriebene Kreis erreicht also den Bogen KZ in Z, oder K, oder in einem Punkte T zwischen K, Z. Im ersten Fall ist DZ, im zweiten HK die gesuchte Linie, wie von selbst erhellet. Im dritten ist $BD.DG = DR.RO$

also $TU = N$, wie bey 2. (Fig. 73.)

γ) zwischen dem Mittelpunkte desselben und dem innerhalb des Kreises über DC liegenden Endpunkte seines Durchmessers.

Dieser Fall ist durch β erlediget.

Bonn, gedruckt bey C. F. Thormann.

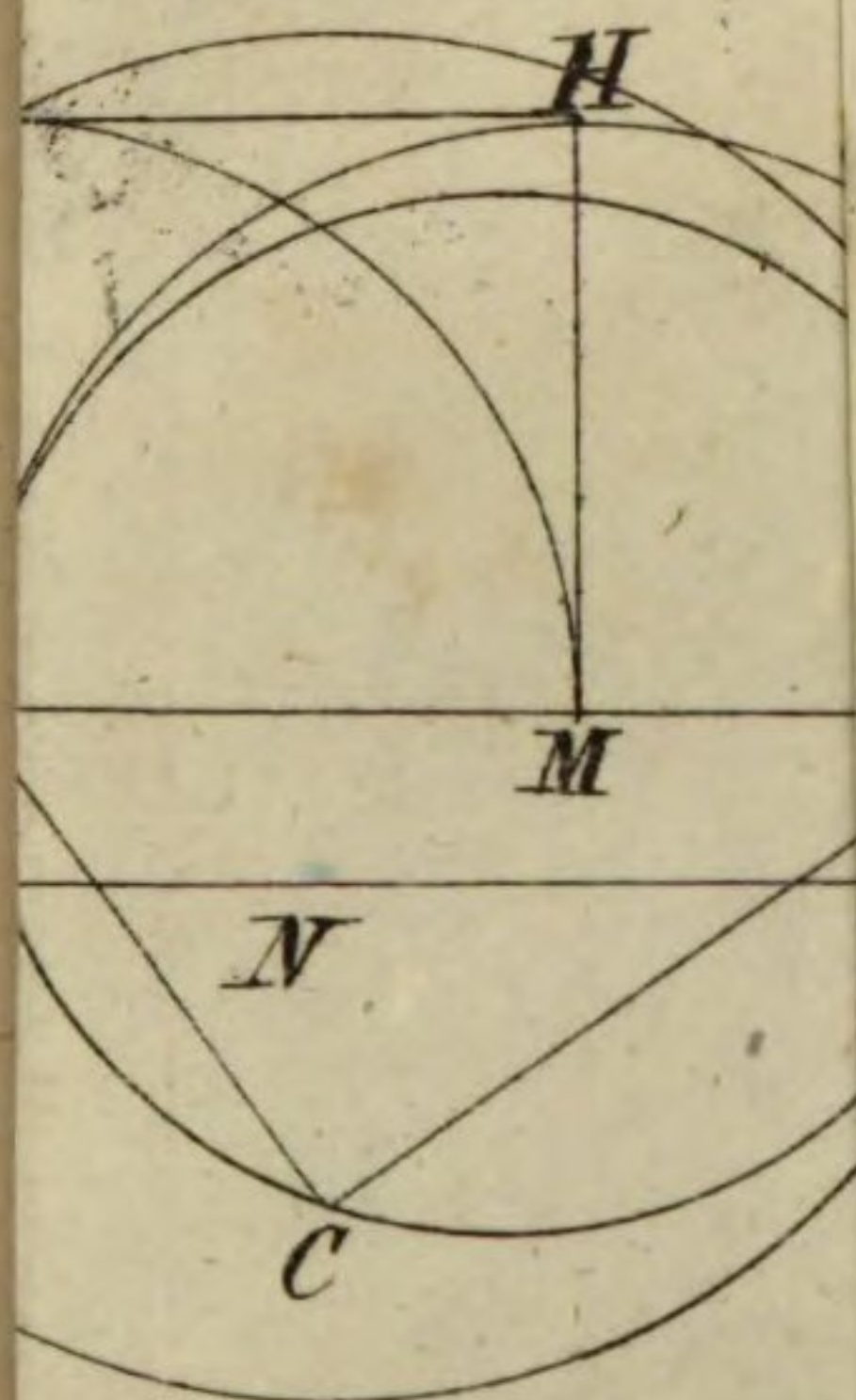
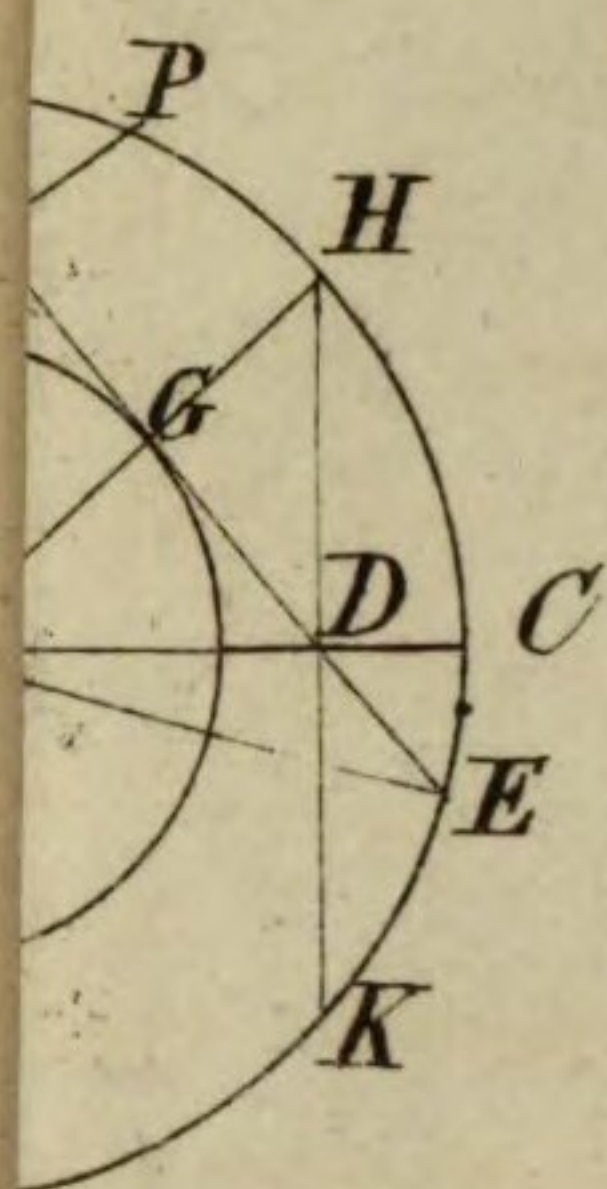
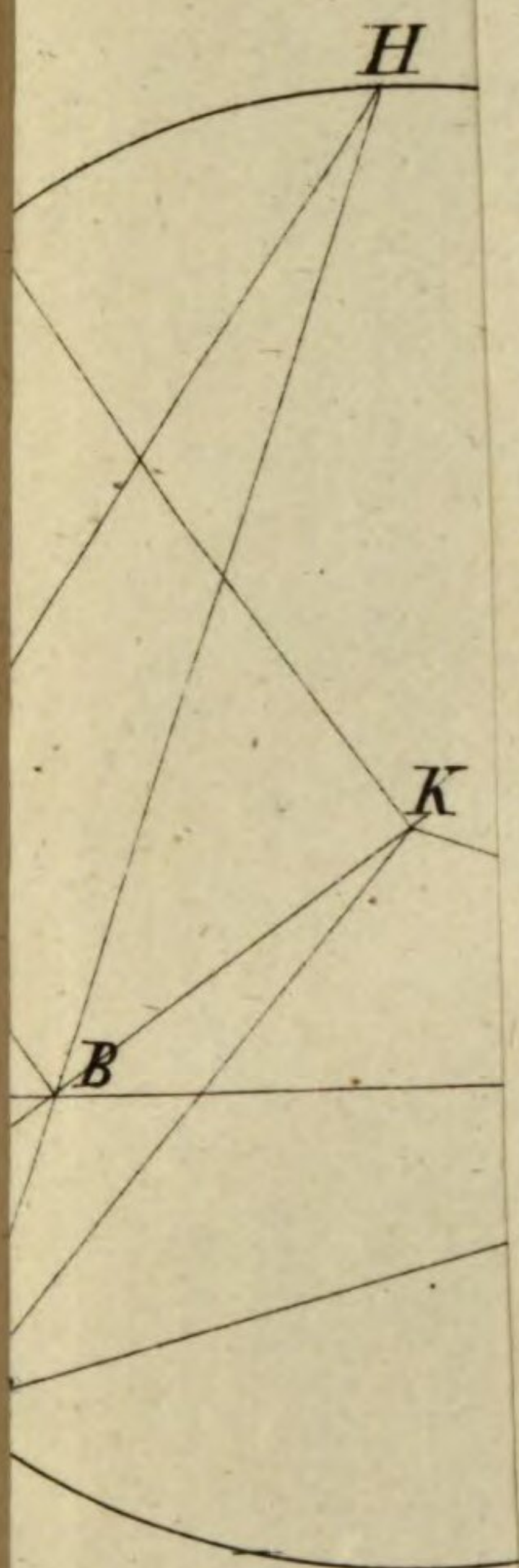


Fig.

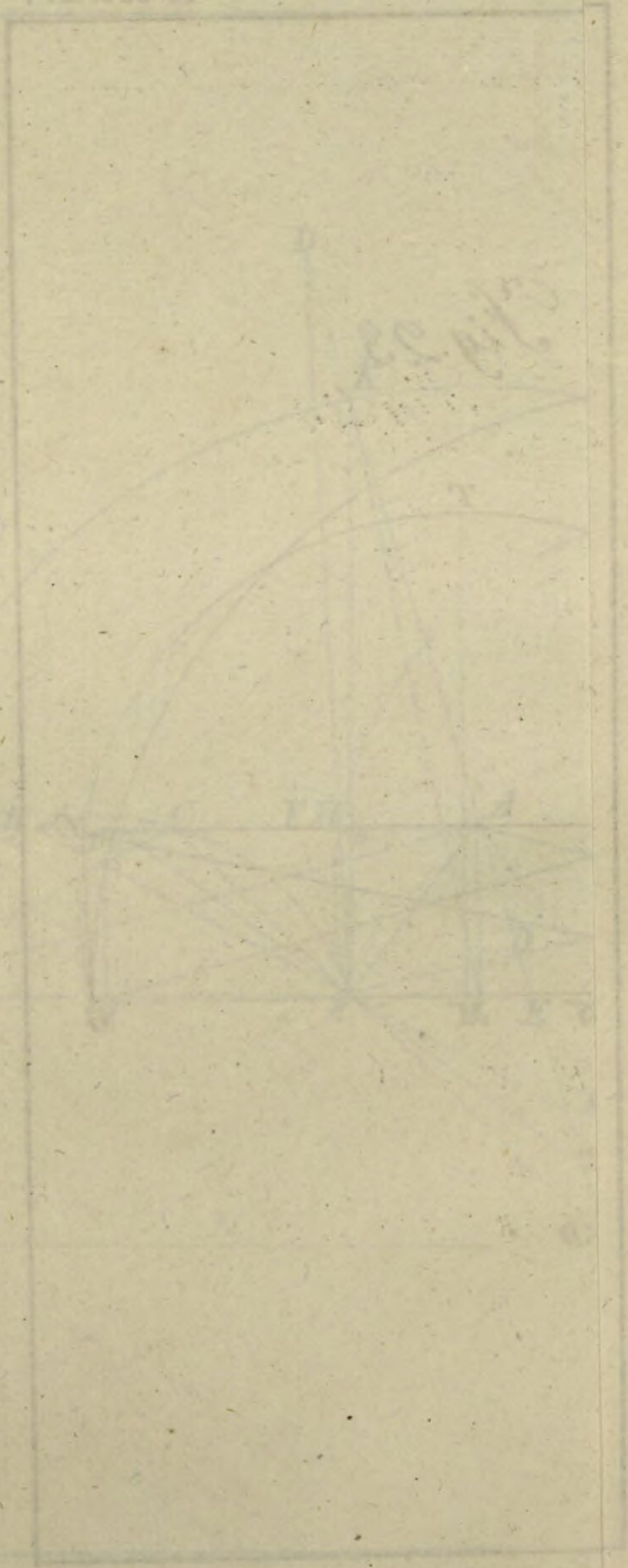
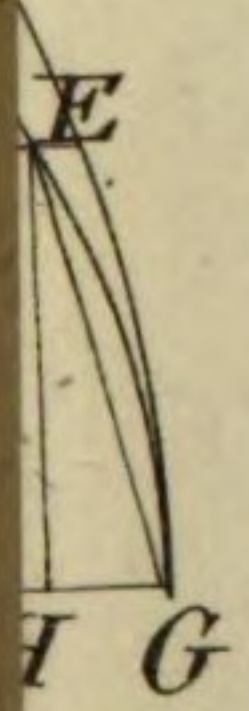
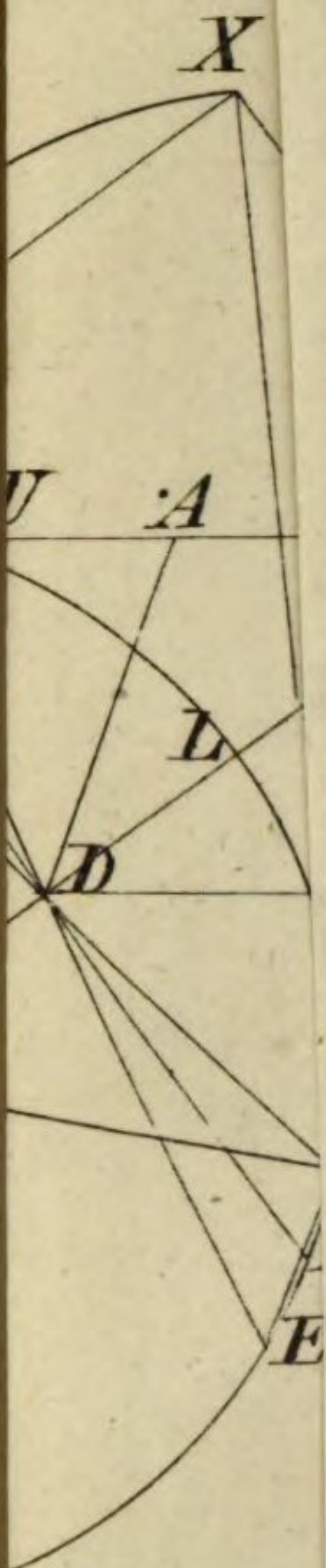
F

L

Bayerische
Staatsbibliothek
München



John



2

N

M

G

O

E

V

F

O

E

Fig. 28.

H

Q

O

K

E

P

17. 10. 18

3

Fig. 26

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Fig. 40

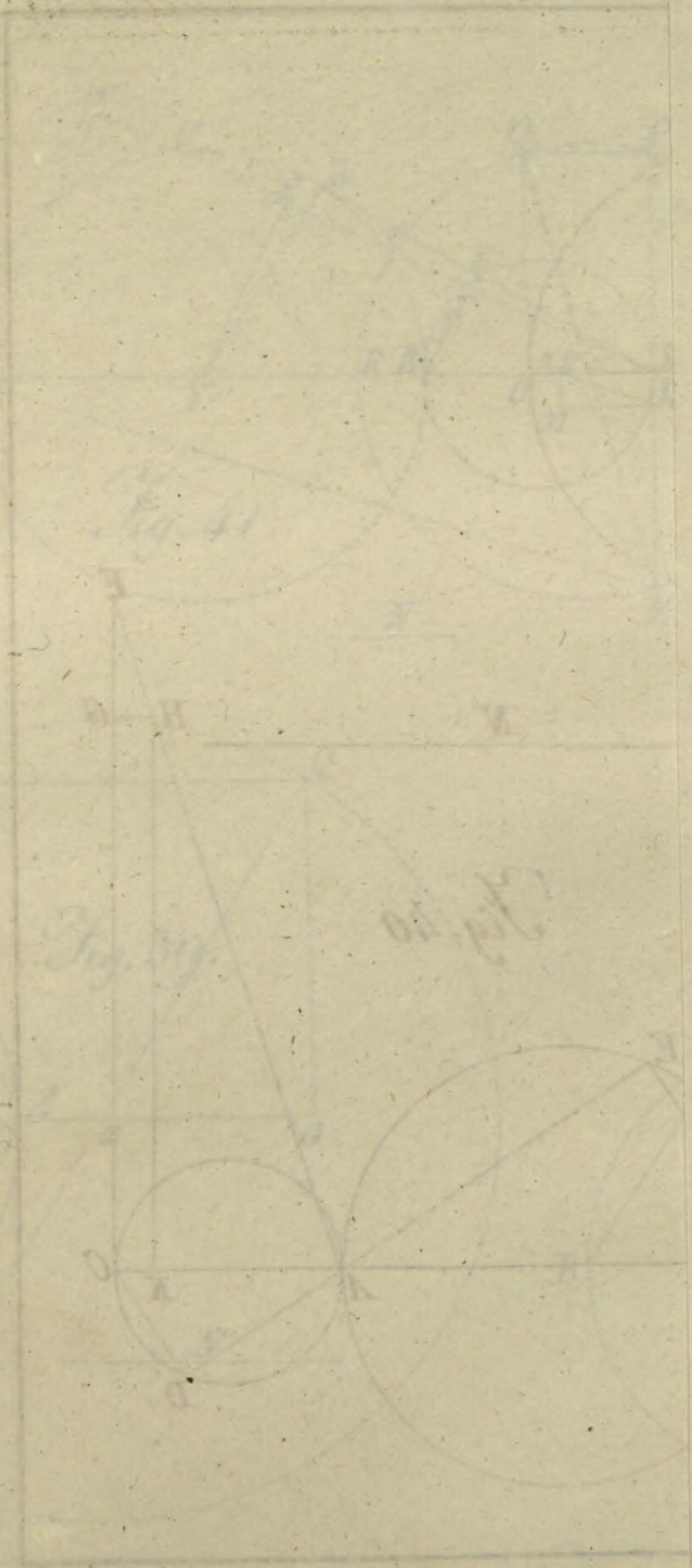
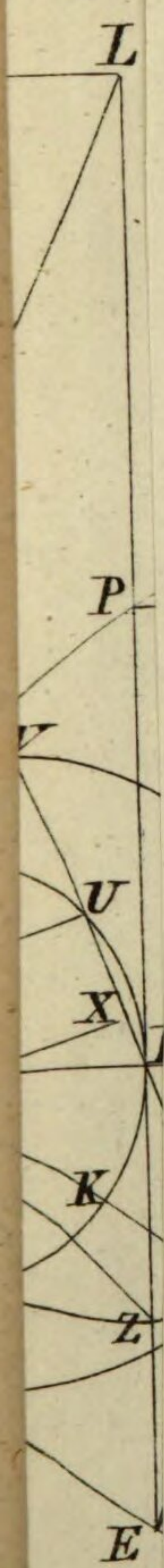


Fig. 41

Fig. 42

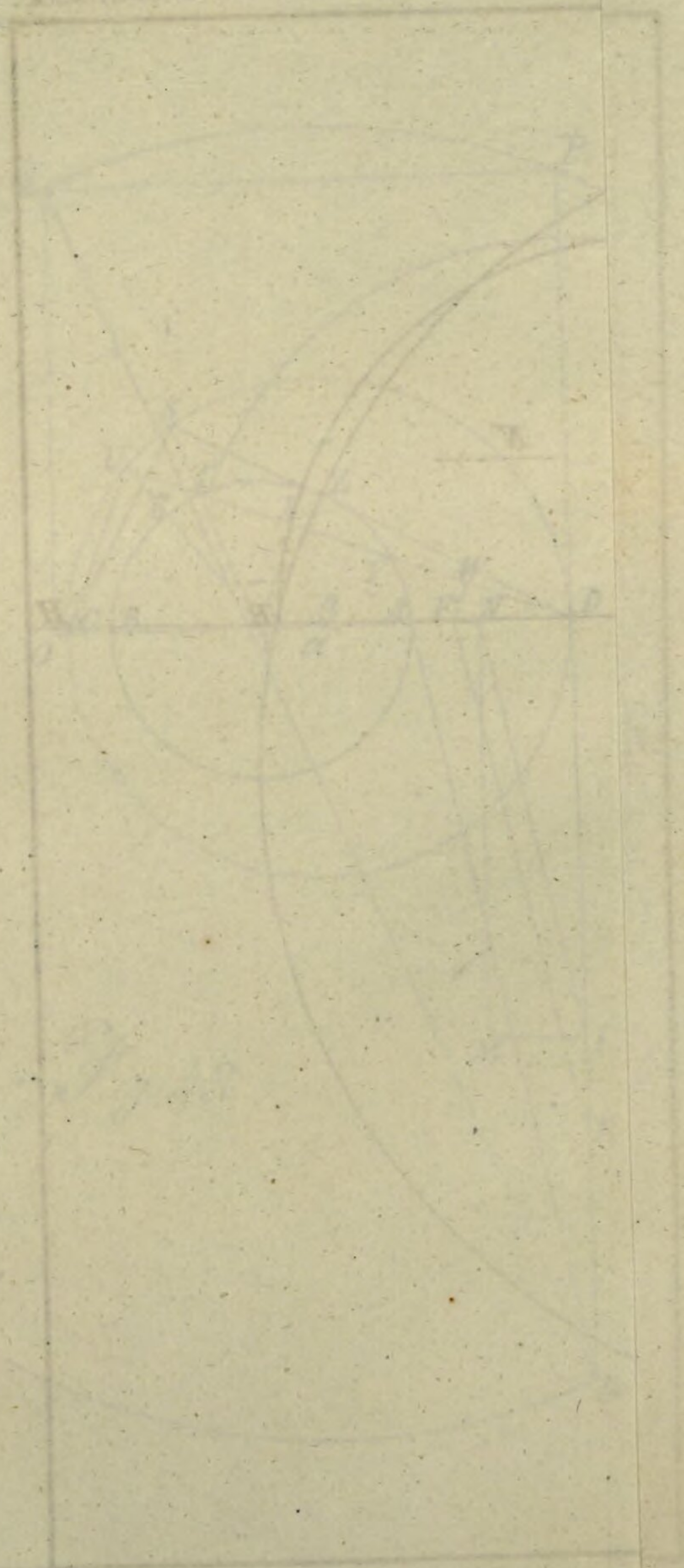
Fig. 43



Y. 407,

N

Table



F B R

T

Fig. 49

F *N*

M

Tab. III.

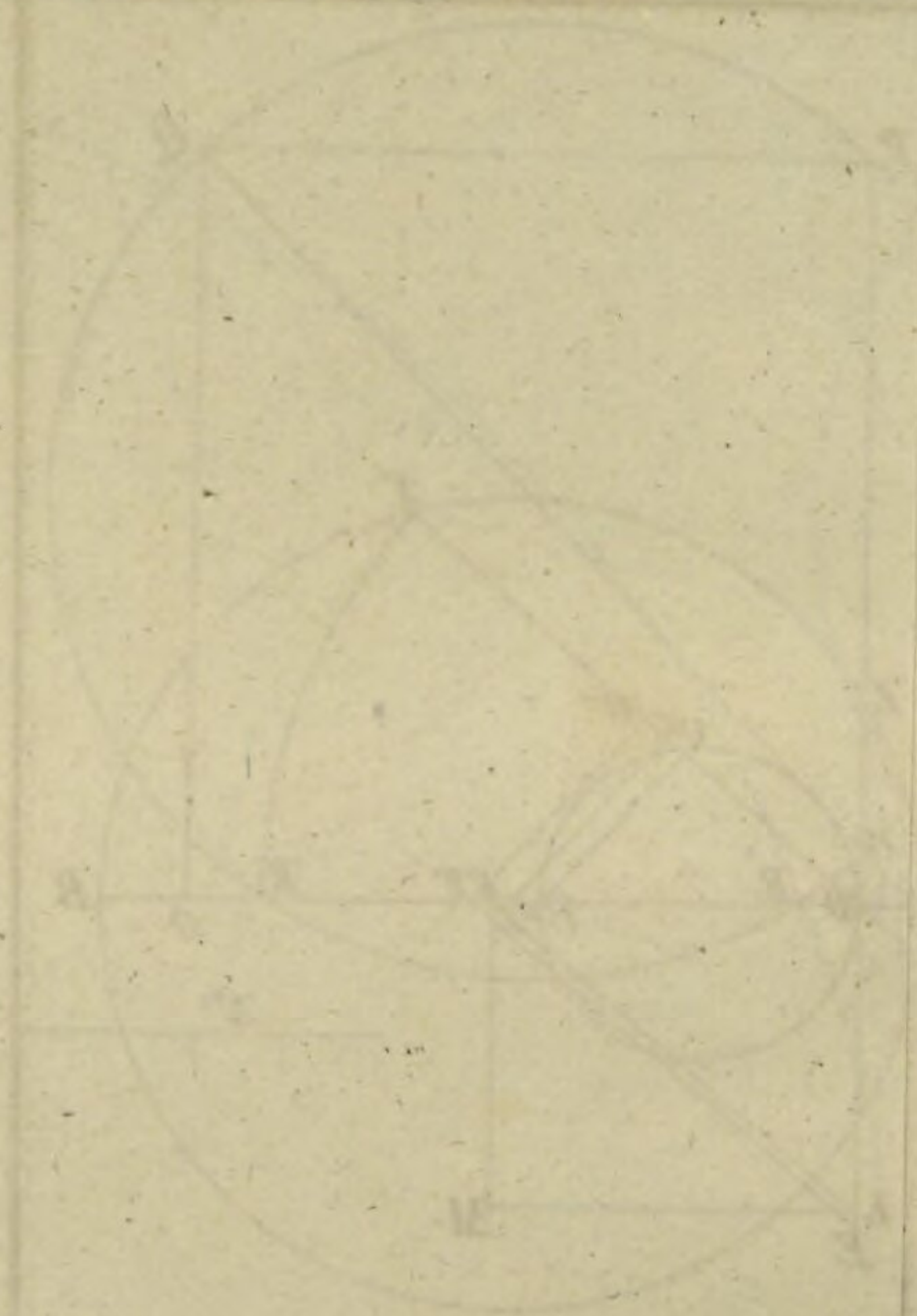
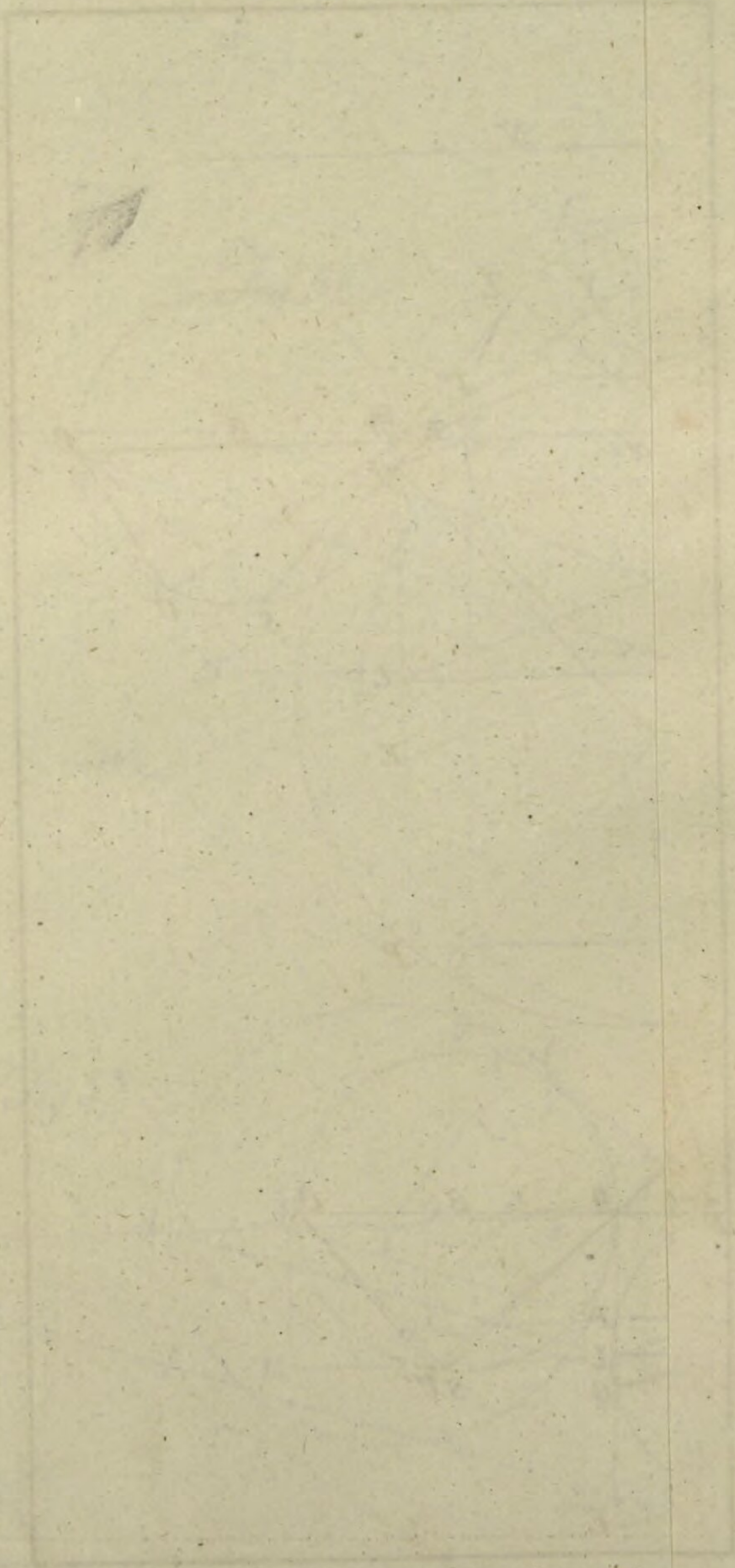


Fig. 3.

M

L

收



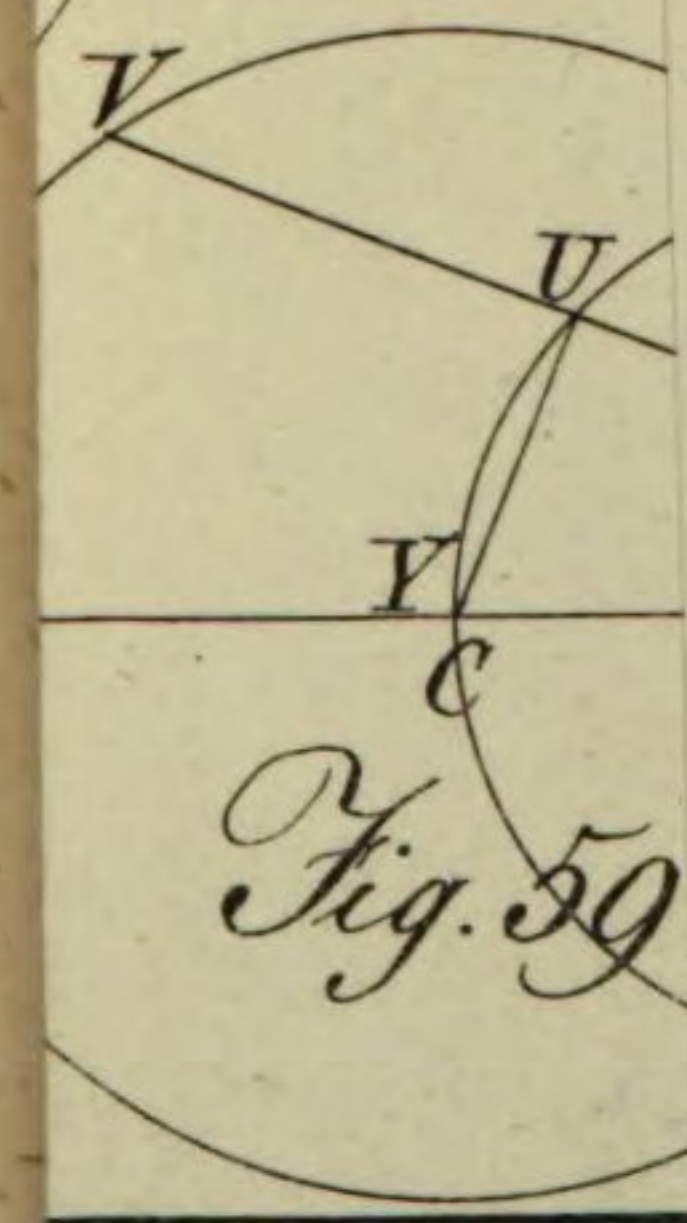
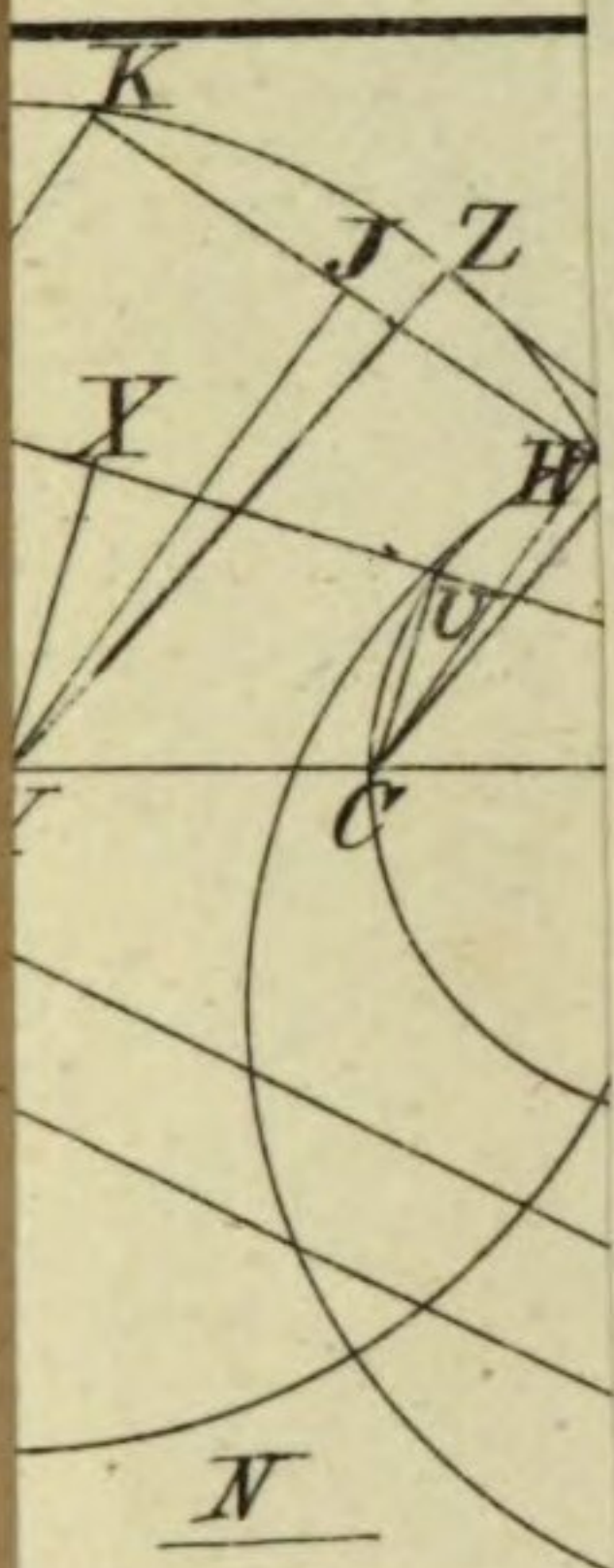
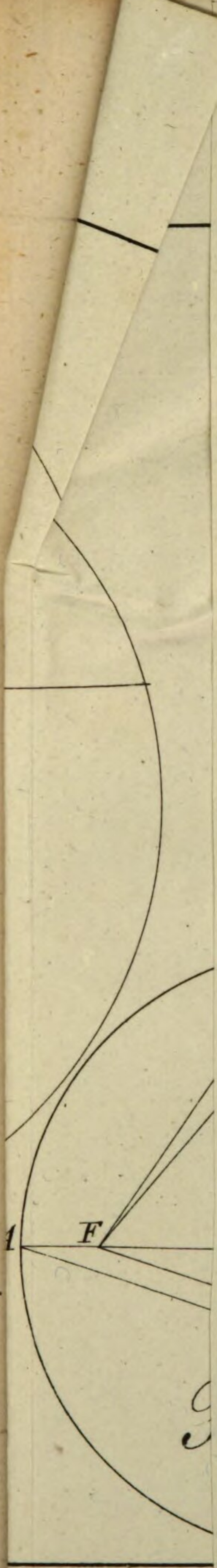
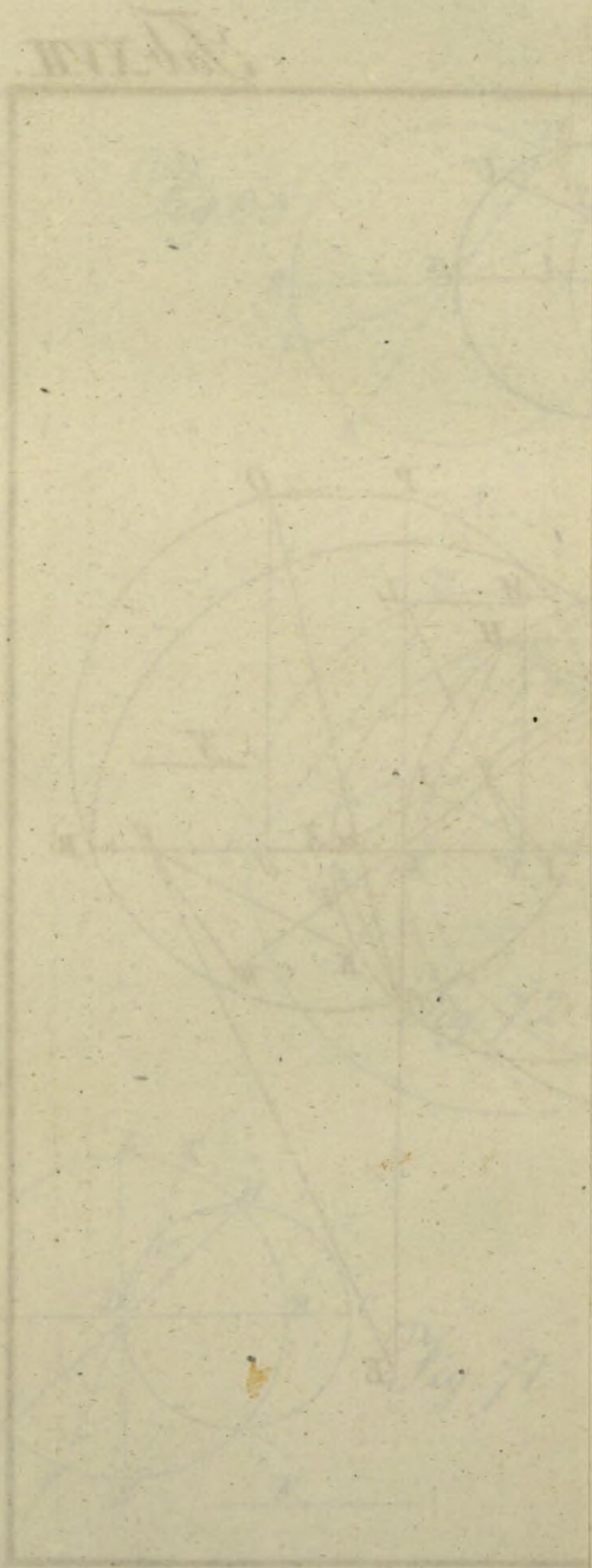
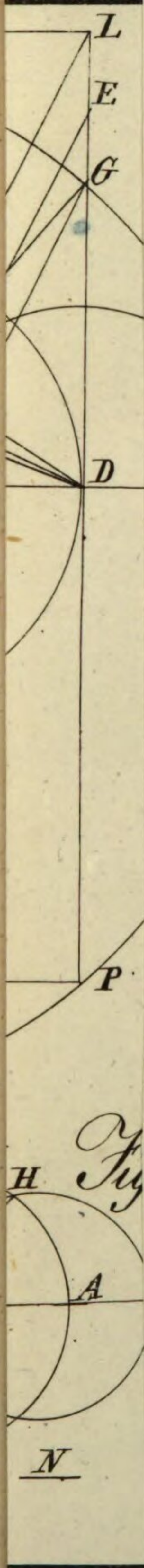


Fig. 59

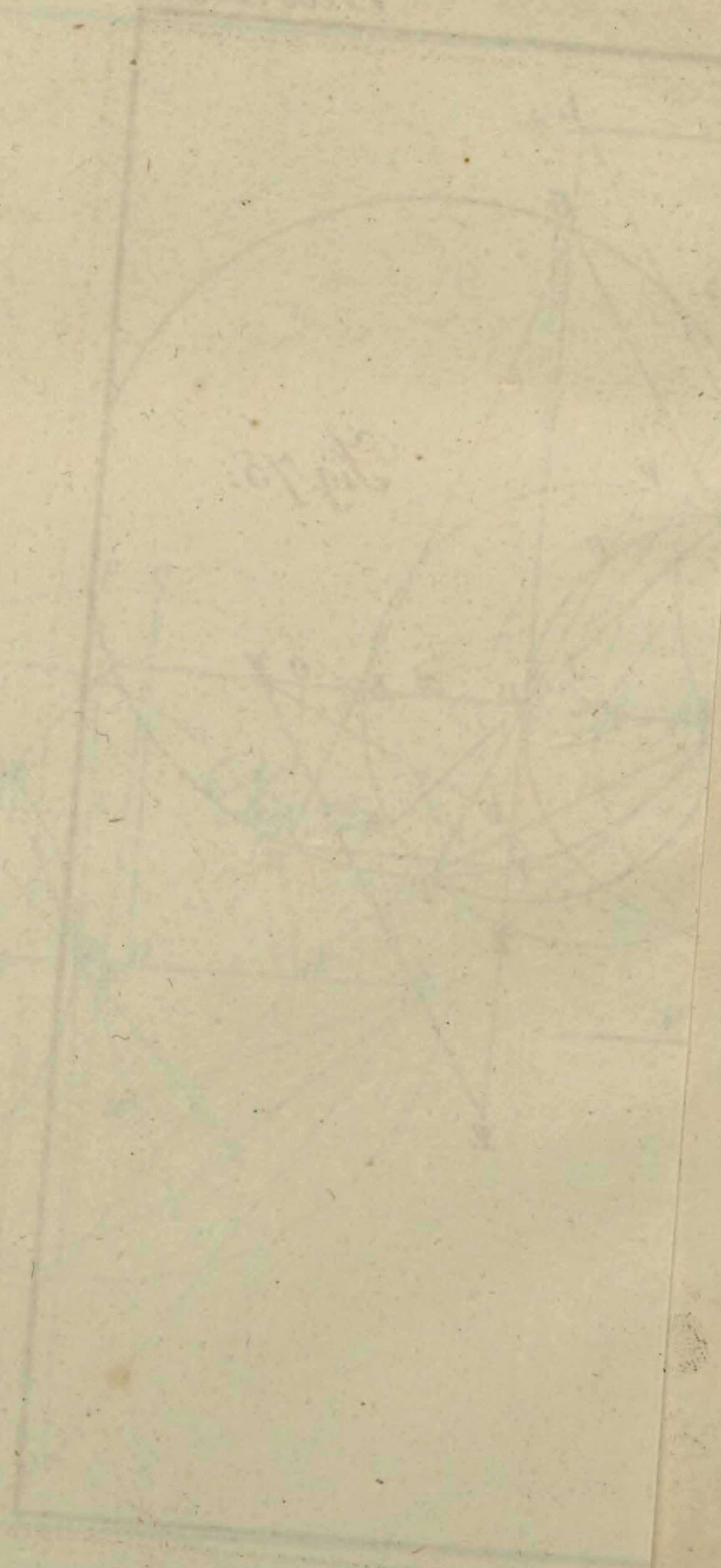
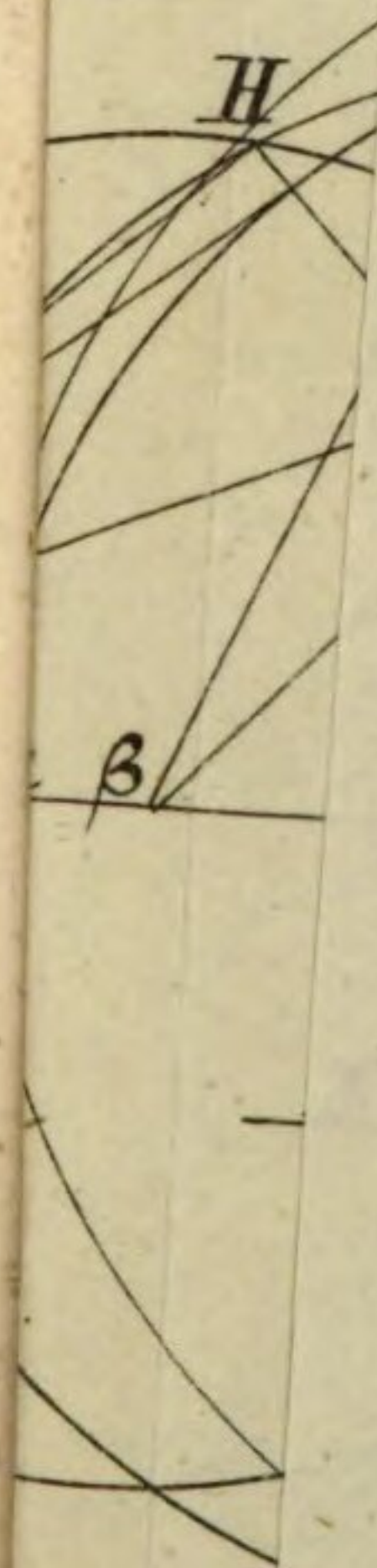




Bayerische
Staatsbibliothek
München

Fig. 67.

E





Apollonius / Horsley, Samuel, / Diesterweg, Wilhelm Adolf,

Die Bücher des Apollonius von Perga De Inclinationibus mit 19 Steintafeln

Berlin 1823

A.gr.b. 471

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10234706-1